

Geometrie.

Nichteuklidische Geometrie:

Fenchel, W.: Über die projektiv-geometrische Grundlage der nichteuklidischen Trigonometrie. Mat. Tidskr. B 1941, 18—30 [Dänisch].

In der Cayley-Kleinschen Begründung der nichteuklidischen Geometrie werden bekanntlich der Abstand zweier Punkte und der Winkel zweier Geraden durch gewisse Logarithmen von Doppelverhältnissen definiert. Daraus folgen für die nichteuklidische Trigonometrie Beziehungen zwischen den trigonometrischen Formeln für ein Dreieck und gewissen Doppelverhältnisgleichungen. Die Formeln für das rechtwinklige Dreieck erweisen sich insbesondere als gleichbedeutend mit einfachen, von Möbius gefundenen Beziehungen zwischen fünf mit einem allgemeinen Fünfeck verknüpften Doppelverhältnissen (A. F. Möbius, Der barycentrische Calcul S. 253—257; Leipzig 1827; Werke I, S. 228—231). Für die sphärisch-elliptische Trigonometrie wird man auf die bekannte Nepersche Regel geführt; in dem hyperbolischen Fall handelt es sich um die Beziehungen zwischen den sogenannten komplementären Figuren (H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, 3. Aufl., 1923, § 10, S. 32—37). Die ausführliche Darstellung dieser Zusammenhänge bildet den Inhalt des Artikels. *Max Zacharias.*

Elementargeometrie, darstellende Geometrie:

Fabrieus-Bjerre, Fr.: Eine elementargeometrische Aufgabe über perspektive Dreiecke. Mat. Tidskr. B 1941, 1—17 [Dänisch].

Verf. untersucht die Aufgabe, zu zwei gegebenen perspektiven Dreiecken einer Ebene ein drittes Dreieck zu finden, das dem ersten eingeschrieben und dem zweiten umschrieben ist. Im ersten Paragraphen der Arbeit ergibt sich, daß es im allgemeinen zwei derartige Dreiecke gibt; beide sind einem und demselben Kegelschnitt eingeschrieben. Im zweiten Paragraphen werden die Realitätsbedingungen untersucht. Der letzte Paragraph handelt von gewissen Sonderfällen. *Max Zacharias (Berlin).*

Lebesgue, Henri: Sur les n -sectrices d'un triangle (En mémoire de Frank Morley [1860—1937]). Enseignement Math. 38, 39—58 (1940).

Das Ziel der Arbeit ist, wie Verf. ausdrücklich betont, weder einen eleganten noch einen kurzen Beweis des Morleyschen Satzes zu geben, sondern durch Auseinandersetzen der vielen bemerkenswerten Eigenschaften der Morleyschen Konfiguration den wesentlichen Inhalt des Satzes klar hervorzuheben. Das geschieht leichter, wenn statt der Dreiteilung zugleich die n -Teilung der Winkel eines Dreiecks betrachtet wird. — In der Ebene des Dreiecks ABC sind der Punkt $C_{h,i}$ durch die Winkelkongruenzen $\sphericalangle BAC_{h,i} \equiv \frac{1}{n} \sphericalangle BAC + \frac{h}{n} \pi \pmod{\pi}$ und $\sphericalangle ABC_{h,i} \equiv \frac{1}{n} \sphericalangle ABC + \frac{i}{n} \pi \pmod{\pi}$, die Punkte $A_{j,k}$, $B_{l,m}$ dazu ganz analog definiert. Es ergibt sich eine Reihe schöner Sätze für diese Punkte. — Die $C_{h,i}$ mit $h - i \equiv p \pmod{n}$ bilden ein reguläres n -Eck Π_p . Die Schnittpunkte der bezüglich A homolog gelegenen Seiten von Π_p und Π_{p+1} sind die Eckpunkte eines Polygons Π_p^1 . In ähnlicher Weise liefern Π_p^1 und Π_{p+1}^1 (durch Schneiden entsprechender Seiten) das Polygon Π_p^2 usw. Alle diese Π_p^q sind „regulär bezüglich B “, d. h. ihre Winkel sind gleich und ihre Seiten werden aus B unter gleichen Winkeln gesehen. Jedes Π^{n-1} entartet in den Punkt C ; mit $q = n - 1$ bricht also die Reihe der Polygone Π_p^q ab. Bildet man von $AC_{h,i}$ ausgehend einen Streckenzug, dessen n Seiten alle von B aus unter gleichen Winkeln gesehen werden und dessen Winkel $\pmod{\pi}$ alle gleich $\sphericalangle ABC_{h,i} + \frac{\pi}{n}$ sind, so ist C der Endpunkt des Strecken-

zuges, $A_{-i, h-i}$ sein vorletzter Eckpunkt; $C_{h+1, i+1}$ liegt auf der zweiten und $A_{-i-1, h-i-1}$ auf der vorletzten Seite. — Für $n = 2$ ergeben sich so die bekannten Sätze über Winkelhalbierende, für $n = 3$ verschiedenste Eigenschaften der Morleyschen Konfiguration und der Morleysche Satz selbst. Verf. glaubt, daß seine mit Winkelrechnungen und trigonometrischen Rechnungen bewiesenen Sätze als fruchtbarer Boden elementargeometrischer Untersuchungen dienen können. *G. Hajós* (Budapest).

Baer, W. S. J.: Über dreiseitige Pyramiden mit vier gleichen Höhen. *Tôhoku Math. J.* 47, 261—278 (1940).

Die Arbeit enthält ziemlich umständliche algebraisch-trigonometrische Herleitungen von Sätzen, welche sich auf die Seitendreiecke, Höhen, Mittel- und Schwerlinien, Um- und Inkugeln des gleichflächigen Tetraeders beziehen und größtenteils bekannt sind (vgl. Enzykl. d. math. Wiss. III AB 9; M. Zacharias, Elementargeometrie, S. 1062—1063, sowie die dort zitierte Literatur). *Egerváry* (Budapest).

Ciani, Edgardo: La configurazione dei cubi iscritti in un dodecaedro regolare convesso. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. 3, 313—318 (1941).

G. Vacca hat [*Boll. Un. Mat. Ital* (2) 2, 66—70 (1939); dies. Zbl. 22, 158] eine Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks angegeben, die von der Figur der fünf einem regelmäßigen Zwölfflach einbeschriebenen Würfel ausgeht. Die Ecken jedes dieser Würfel sind Ecken des Zwölfflachs, während die Kanten Flächendiagonalen des Zwölfflachs sind. Verf. untersucht die Konfiguration der fünf Würfel unabhängig von jener Fünfeckskonstruktion. Die zwölf Ecken des Zwölfflachs, die einem der fünf Würfel nicht angehören, sind Endpunkte von drei Paaren gegenüberliegender Kanten des Zwölfflachs, und die drei durch diese Kantenpaare bestimmten Ebenen bilden eine dreieckswinklige Ecke. Je zwei Würfel haben ein Paar gegenüberliegender Ecken des Zwölfflachs gemein. Geht man umgekehrt von einem gegebenen Würfel aus, so gehören zu ihm zwei umbeschriebene Zwölffläche, von denen das eine aus dem andern durch eine Drehung um 90° um die Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenflächen des Würfels hervorgeht. Verf. konstruiert die Gruppe G_{60} der 60 Rotationen, für die das Zwölfflach invariant ist, als Untergruppe der durch die fünf einbeschriebenen Würfel bestimmten Gruppe G_{120} . *Max Zacharias* (Berlin).

Cavallaro, Vincenzo G.: Sul centro di gravità del semicerchio eterogeneo con densità proporzionale alla distanza da centro. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. 3, 325—327 (1941).

Der Schwerpunkt eines Halbkreises vom Radius R , dessen Dichte proportional dem Mittelpunktsabstand wächst, liegt nach B. Cavalieri (vgl. A. Agostini, dies. Zbl. 23, 387) im Abstand $H = \frac{3}{2\pi} R$ vom Mittelpunkt auf dem Mittelradius. Man kann ihn bis auf einen Fehler, der unterhalb $10^{-5} R$ liegt, konstruieren, indem man R durch den goldenen Schnitt teilt und H durch $\frac{5}{4}$ des kleineren Teiles annähert. *Geppert*.

Claeys, A.: Über den Nutzen der darstellenden Geometrie in der Planimetrie. *Wis.-en. Natuurkdg Tijdschr.* 10, 85—95 (1941) [Flämisch].

Manche Eigenschaften ebener Figuren lassen sich dadurch ableiten, daß man die Figuren als orthogonale Projektionen räumlicher Figuren betrachtet. Verf. gibt für diese bekannte Tatsache folgende Beispiele: 1. Perspektive Dreiecke. 2. Potenzpunkt dreier Kreise. 3. Homothetische Kreise. 4. Legt man durch die reellen Schnittpunkte zweier Kreise k und k' zwei beliebige Geraden CE und DF , die k in C und D , k' in E und F schneiden, so ist $CD \parallel EF$. 5. Tangenten einer Parabel. 6. Konstruktionen betreffend eine zirkuläre Kurve vierter Ordnung: a) zwei verschiedene Tangentenkonstruktionen, b) Bestimmung der Asymptoten, c) Doppelpunkte und Tangenten in diesen.

Zacharias (Berlin).

Projektive und algebraische Geometrie:

Amodeo, Federico: Origine e sviluppo della geometria proiettiva. 2. *Giorn. Mat. Battaglini*, III. s. 76, 1—88 (1939).

Zu Teil 1 vgl. dies. Zbl. 21, 51 und 22, 3. Einleitung: Plücker, Darboux, Lie,

Klein. § 11. Über Räume. § 12. Komplexe Geometrie. § 13. Hyperkomplexe Geometrie. § 14. Das Prinzip der Kontinuität und die Vervollkommenung des Satzes von v. Staudt. § 15. Axiomatische Geometrie. § 16. Transformationsgruppen als Grundlagen der Modernen Geometrie (Das Erlanger Programm). § 17. Klassifikation der Transformationsgruppen. § 18. Die Fundamentalgruppe (Laguerresche Transformationen, Differentialgeometrie, Intrinsische Geometrie, Integralgeometrie, Absoluter Differentialkalkül, Relativitätstheorie, Ausdehnungslehre, allgemeine Vektoranalysis, Parallelismus und unitäre Theorie der Relativität). § 19. Einige Untergruppen der projektiven Gruppe. § 20. Die Gruppe der Kollineationen. *E. A. Weiss* (Posen).

Pretti, Fabio: La funzione „valore assoluto“ in geometria proiettiva. 2. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 76, 97—114 (1939).

Verf. hat sich schon früher mit der Anwendung der Funktion $|x|$ auf die analytische Darstellung geometrischer Figuren beschäftigt (dies. Zbl. 21, 52). Hier werden absolute Ausdrücke höherer Ordnung eingeführt; ein absoluter Ausdruck 2. Ordnung bedeutet z. B. den absoluten Wert eines Ausdrucks, der die Funktion $|x|$ schon einfach enthält. Es werden zunächst Funktionen 2. Ordnung folgender Art betrachtet:

$$a + \sum a_i |x - h_i| + \sum b_i |c_i + \sum d_{ij} |x - k_j||;$$

eine solche ist einer geeigneten Funktion 1. Ordnung identisch gleich. Allgemeiner kann man eine homogene Gleichung 2. Ordnung betrachten:

$$\sum a_i |\Delta_i| + \sum b_i |\sum c_{ij} |\Delta_{ij}|| = 0,$$

wo die Δ_i, Δ_{ij} linear und homogen in den homogenen Punktkoordinaten x_0, x_1, \dots, x_r sind; im Raume S_r stellt sie ein Aggregat von Polytopen beliebiger Form und Dimension dar. Zahlreiche Beispiele. — Die einparametrischen Gleichungen

$$\varrho x_i = a_{i0} + \sum a_{ij} |t - h_j|$$

($i = 0, 1, \dots, r; j = 1, 2, \dots, n$) stellen im Raume S_r einen geschlossenen Polygonzug mit $n + 1$ Seiten dar. Die zweiparametrischen Gleichungen $\varrho x_i = \sum a_{ij} |h_j u + k_j v + l_j|$ führen zu einer Polyederfläche, die der projektiven Ebene topologisch äquivalent ist; verschiedene Beispiele; darunter das einseitige Siebenflach von Reinhardt. Die Fälle von Parametergleichungen mit Gliedern 2. Ordnung oder mit komplexen Parameterwerten werden nur angedeutet.

E. G. Togliatti (Genova).

Brusotti, Luigi: Un semplice modello metrico del tetraesagono. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 310—312 (1941).

E. Ciani [Alcune osservazioni sopra la configurazione di Kummer, Giorn. Mat. Battaglini 36, 68—76 (1898), oder Scritti geometrici scelti Padova 1937, 293—301] nennt ein einem Kegelschnitt einbeschriebenes Sechseck Tetrahexagon, wenn es vier involutorische Projektivitäten zuläßt, die keinen Eckpunkt des Sechsecks in Ruhe lassen. Im binären Gebiete der Kegelschnittpunkte wird ein Tetrahexagon durch eine kubische Form und ihre kubische Kovariante gegeben. Ein metrischer Sonderfall ergibt sich daher, wenn man auf einem Kreise ein gleichseitiges Dreieck und das Dreieck der seinen Eckpunkten diametral gegenüberliegenden Eckpunkte nimmt. An diesem metrischen Modell lassen sich die invarianten und gruppentheoretischen Eigenschaften des Tetrahexagons leicht untersuchen. — Invariante Bedingung dafür, daß die Form $(\alpha\xi)^6$ auf einem Kegelschnitt ein Tetrahexagon darstellt. *E. A. Weiss*.

Klug, Leopold: Konjugierte Kegelschnitt-Tripel und ihre speziellen Fälle. Mat. fiz. Lap. 48, 144—161 u. dtsh. Zusammenfassung 161 (1941) [Ungarisch].

Drei Kegelschnitte bilden ein konjugiertes Tripel, wenn je zwei unter ihnen Polarfiguren bezüglich des dritten sind. Drei je um 60° verdrehte gleichseitige Hyperbeln mit gemeinsamem Mittelpunkt bilden ein solches Tripel. Durch Zentralprojektion dieser Figur ergibt sich jedes konjugierte Kegelschnitt-Tripel. Einer der Kegelschnitte ist immer eine Hyperbel. Es werden Spezialfälle sowie Existenz- und Konstruktionsfragen behandelt.

G. Hajós (Budapest).

Chisini, Oscar: La costruzione di Steiner della tangente ad una lemniscata. *Period. Mat.*, IV. s. 21, 45—50 (1941).

Die Steinersche Konstruktion [J. reine angew. Math. 14, 80—82 (1835)] der Tangente an die allgemeine Lemniskate (Cassinische Kurve) beruht auf folgendem Lemma: Sind P, Q zwei Punkte der Lemniskate mit den Brennpunkten F, F' , und schneidet die Gerade PQ die inneren bzw. äußeren Winkelhalbierenden der Winkel PFQ und $P'F'Q$ in I und I' bzw. in E und E' , so sind die Strecken PI und $I'Q$ bzw. EP und QE' gleich. Nach Wiederholung der Steinerschen Konstruktion und ihres Beweises gibt Verf. für das Lemma einen neuen Beweis. *G. Hajós* (Budapest).

Turri, T.: Sul gruppo delle omografie che trasformano in sé una correlazione. *Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari* 10, 69—87 (1940).

Sei δ eine nicht ausgeartete Korrelation in einem projektiv komplexen Raume S_n . Die Elementarteiler der charakteristischen Matrix der Homographie δ^2 seien bekannt. Dann entwickelt Verf. eine geometrische Methode, um die Struktur und die Ordnung der Gruppe der Homographien, die δ in sich transformieren, zu bestimmen. (Die Ordnung der genannten Gruppe wurde, vom rein analytisch-algebraischen Standpunkte aus, schon 1890/91 von Voss berechnet.) Durch Anwendung verschiedener Hilfsmittel, die in der Theorie der Korrelationen und Homographien zum Teil schon längst bekannt waren und zum Teil vom Verf. selbst vorbereitet wurden, kann man sich im wesentlichen auf drei Fälle beschränken, je nachdem die charakteristische Gleichung von δ^2 a) nur zwei verschiedene und reziproke Wurzeln; b) eine einzige Wurzel gleich $+1$; c) eine einzige Wurzel gleich -1 besitzt. *Conforto* (Roma).

Gambier, Bertrand: Étude d'un espace à quatre dimensions décomposable en la somme de deux espaces à deux dimensions. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 19, 237—260 (1940).

Verf. deutet die reellen Kollineationen aus R_3 als jene Transformationen der Bipunkte (a, α) einer Kugel, bei denen die „isometrische Differenz“ $ab - \alpha\beta$ zweier Bipunkte erhalten bleibt. Leider ist an der Arbeit sehr wenig Neues, wie Verf. selbst in der Einleitung befürchtet (der Artikel wurde weit ab von jeder Bibliothek geschrieben, als der Verf. eingezogen war). Vielleicht kann der konstruktive Gang der Beweisführung als neu gelten. Wir haben es aber hier ersichtlich mit dem Studyschen Ideenkreis zu tun, und zwar mit dem elliptischen Seitenstück des wohlbekannten Blaschke-Grünwaldschen Übertragungsprinzips. — Der Fall $ab = \alpha\beta$ wird selbstverständlich besonders betrachtet. Bekannte Sätze über die Winkel der schneidenden Kreise im Raume, über die hyperbolischen Morley-Petersenschen Konfiguration usw. folgen.

D. Barbilian (București).

Cherubino, Salvatore: Sulle corrispondenze algebriche fra curve. *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. 10, 1—11 (1941).

Sind ω und Ω die Riemannschen Periodenmatrizes der Abelschen Integrale 1. Gattung zweier algebraischer Kurven, und ist eine algebraische Korrespondenz zwischen den beiden Kurven gegeben, so bestehen bekanntlich Relationen der Gestalt

$$\pi\omega = \Omega T_{-1}, \quad \pi^*\Omega = \omega T_{+1}.$$

Zwischen den Elementen der ganzzahligen Matrizes T, T^* bestehen nach Torelli weitere Relationen. Es wird gezeigt, daß die daraus folgenden Relationen zwischen den Perioden sich auf die bekannten von Riemann reduzieren. Die früher aufgestellte Behauptung, daß TT^* bei geeigneter Wahl der Rückkehrschnitte Diagonalgestalt hat (dies. Zbl. 22, 388) wird zurückgenommen. Es werden aber mehrere Fälle angegeben, in denen TT^* tatsächlich Diagonalgestalt hat, und aus der Annahme der Diagonalgestalt werden weitere Folgerungen gezogen. Schließlich wird eine neue, notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß zwei Kurven, die dieselbe Jacobische Mannigfaltigkeit haben, birational äquivalent sind. *van der Waerden*.

Gandin, Renato: Risoluzione geometrico-funzionale del problema degli spazi plurisecanti una curva algebrica immersa in uno spazio a tre, quattro e cinque dimensioni. Mem. Ist. Veneto Sci. 30, Nr 5, 1—67 (1939).

C sei eine algebraische, von projektiven Singularitäten freie Kurve des S_3 oder S_4 oder S_5 . Innerhalb des Umgebungsraumes werden S_r betrachtet, die bezüglich C vorgeschriebenen Treffbedingungen oder solchen einer mehrfachen Berührung genügen, wobei gegebenenfalls zu C noch geeignete weitere Linearräume hinzuzunehmen sind, mit der Maßgabe, daß die vorgeschriebenen Bedingungen die gesuchten S_r in endlicher Anzahl bestimmen. Die Gesamtheit dieser S_r bestimmt auf C eine gewisse Punktgruppe; Verf. untersucht die Äquivalenzrelation, die diese Punktgruppe als Summe einer passenden Anzahl von Hyperebenenschnittgruppen und eines Vielfachen der kanonischen Schar darzustellen gestattet. Es handelt sich also im Severischen Sinne um die funktionale Lösung des klassischen Problems der Schnitträume; dieser Gesichtspunkt ist z. T. neu und gestattet eine große Allgemeinheit, so daß er auch Fälle umfaßt (z. B. neutrale Gruppen mit mehrfachen Punkten), die bisher nicht einmal in rein abzählender Weise untersucht wurden. Die Hilfsmittel des Verf. greifen vom Korrespondenzprinzip von Chasles für rationale Kurven bis zu seiner Verallgemeinerung auf beliebige Kurven durch Cayley und Brill, von der Zeuthenschen Regel zur Berechnung der Vielfachheiten der Ruhepunkte einer Korrespondenz bis zu der de Jonquièresschen Formel mit ihrer funktionalen Deutung durch Torelli und dem Kriterium von Comessatti, das die Anzahl der $(r+1)$ -punktigen Gruppen bestimmt, die $r+1$ vorgegebenen Linearscharen g_r^n gemeinsam sind. Überdies wird noch ausdrücklich das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl verwendet. Es handelt sich um 54 vollkommen erledigte Probleme, zwei derselben sind einführenden Charakters, vier beziehen sich auf Kurven des S_3 , 20 auf solche des S_4 und die weiteren 28 auf den S_5 . — Hier kann nicht einmal der Inhalt der erhaltenen Sätze wiedergegeben werden. Die verwendete Methode, die, was ihre formale Seite anlangt, in allen Fällen dieselbe ist, geht folgendermaßen vor: Man konstruiert auf der Kurve C eine Korrespondenz mit bestimmten Indizes, deren Koinzidenzgruppe entweder mit der gesuchten Gruppe zusammenfällt oder in passender Weise mit ihr zusammenhängt; die Anwendung des Cayley-Brillschen Prinzips in seiner funktionalen Form führt dann zur gesuchten Äquivalenzrelation. Aus dieser leitet Verf. die entsprechende Anzahlbeziehung ab und gewinnt dann Ergebnisse, die größtenteils bekannt sind, z. B. die Anzahl der Quadri-sekanten einer Raumkurve (Berzolari), die Anzahl der dreifachen Schnittebenen einer Kurve des S_4 , die zugleich drei allgemeine Geraden treffen (Comessatti), die Anzahl der Trisekanten einer Kurve des S_4 (Severi) und weitere Anzahlen, die schon von Severi bestimmt wurden. Über die allgemeine Methode hinaus verwendet aber Verf. bei den Anzahlenproblemen noch weitere interessante geometrische Eigenschaften der jeweiligen Konfiguration.

L. Campedelli (Firenze).

Enriques, Federico: Sur l'extension du théorème de Riemann-Roch aux systèmes linéaires de courbes appartenant à une surface algébrique. Bull. Sci. math., II. s. 64, 207—215 (1940).

È noto che il teorema di Riemann-Roch per le curve algebriche, si estende alle superficie sotto forma di una diseguglianza nella quale appaiono il genere e il grado, π ed n , di un sistema lineare completo, $|C|$, la sua dimensione, r , ed il suo indice di specialità, i (essendo $i-1$ la dimensione del sistema residuo di $|C|$ rispetto al sistema canonico). Precisamente si ha: $r \geq p_a + n - \pi + 1 - i$, designando con p_a il genere numerico della superficie. — Dopo i risultati parziali conseguiti dal Noether [C. R. Acad. Sci., Paris 103, 734—737 (1886)], il teorema, nella sua forma ora ricordata, è dovuto alle ricerche dell'Enriques e del Castelnuovo, negli anni che vanno dal 1893 al 1897. In un primo tempo l'Enriques [Mem. Accad. Sci. Torino, s. 2., 44, 171—232 (1894); Mem. Soc. ital. Sci. (detta dei XL) s. 3., 10, 1—81 (1896)] è riuscito a determinare la dimensione del sistema aggiunto ad un sistema lineare irriducibile, ossia, in

sostanza, dei sistemi $|C|$, non speciali, più ampi del sistema canonico $|K|$, cioè contenenti parzialmente $|K|$ stesso. Per passare da questi a tutti gli altri sistemi lineari, ed in particolare a quelli speciali (cioè contenuti in $|K|$), il Castelnuovo [Mem. Soc. ital. Sci. (detta dei XL) s. 3., 10, 82—102 (1896); Ann. di Mat., s. 2., 25, 235—318 (1897)] ha fatto ricorso ad un ingegnoso procedimento, mediante il quale giunge a stabilire direttamente come la serie caratteristica di un sistema lineare irriducibile abbia sempre una „deficienza“ minore od uguale alla irregolarità $p_g - p_a$ della superficie. Questa trattazione però riesce piuttosto laboriosa. — Poco più tardi, il Severi [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., V. s. 12, 250—257 (1903); Atti Accad. Sci. Torino 40, 288—296 (1905)] è pervenuto a dimostrare il teorema in modo più semplice e generale, valendosi della circostanza che il sistema canonico $|K|$ sega una serie completa sulle curve di un conveniente multiplo di un sistema lineare $|C|$, privo di curve fondamentali. Egli deduce questa proprietà da una opportuna estensione del noto teorema dell' $Af + B\varphi$ di M. Noether (Cfr. Enriques-Campedelli, Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche. Padova 1932; questo Zbl. 5, 409). — L'Enriques presenta ora due nuove dimostrazioni, nelle quali, al posto del lemma del Severi, si trova la proposizione secondo cui un sistema lineare „piccolo“ sega una serie completa sopra ogni curva di un sistema lineare „normalmente grande“. Precisiamo che un sistema $|C|$ si considera come „grande“ rispetto a $|D|$, quando la differenza $|C - D|$ contiene parzialmente il multiplo di un sistema lineare $|L|$, irriducibile e almeno doppiamente infinito; si dice poi „normalmente grande“ se $|L|$ è privo di curve fondamentali. — Delle due dimostrazioni dell'A. la seconda offre una maggiore semplicità. È anche interessante vedere come, in quest'ordine di idee, si riesca a giustificare il teorema del Picard sulla regolarità del sistema aggiunto, almeno per i sistemi lineari di dimensione $r > p_g - p_a$.
L. Campedelli (Firenze).

Morin, Ugo: Sui tipi di sistemi lineari di superficie algebriche a curva-caratteristica di genere due. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 19, 257—288 (1940).

Im Zusammenhang mit der Untersuchung derjenigen algebraischen Flächen, deren Ebenenschnitte hyperelliptisch sind, bestimmte Castelnuovo 1890 (Rend. Circ. mat. Palermo 4, 73—88) die birational verschiedenen Typen, auf die mittels Cremonatransformationen die ebenen einfachen Linearsysteme hyperelliptischer Kurven reduziert werden können. 1893 untersuchte Enriques [Rend. Accad. Lincei, s. V., 2II, 281—287 (1893); Math. Ann. 46, 179—199 (1895)] das analoge Problem für die einfachen Linearsysteme algebraischer Flächen des S_3 , deren charakteristische Kurven, d. h. veränderliche Schnittkurven, hyperelliptisch vom Geschlecht $\pi > 1$ sind. Der Fall $\pi = 1$ wurde später von Enriques [Rend. Accad. Lincei, s. V., 3I, 481—487, 536—543 (1894); Math. Ann. a. a. O.] vollständig erledigt. Für $\pi > 1$ folgt aus den Enriques'schen Resultaten, daß jedes dieser Linearsysteme durch Cremonatransformationen in ein anderes System übergeführt werden kann, das aus Flächen einer gewissen Ordnung r mit einer $(r - 2)$ -fachen Basisgeraden und weiteren geeigneten Basiselementen besteht. Nach dieser Reduktion bleibt aber noch die Frage offen, wie viele und welche der so entstandenen Linearsysteme birational verschieden sind. Diese Frage beantwortet Verf. für den Fall $\pi = 2$. Sein Ergebnis besagt, daß die vollständigen, einfachen, irreduziblen Linearsysteme $|\varphi|$ von algebraischen Flächen des S_3 vom Grade n , deren charakteristische Kurven vom Geschlecht $\pi = 2$ sind, mittels Cremonatransformationen in 25 Familien birational unterschiedener Systeme aufgeteilt werden können. Für jede dieser Familien bestimmt Verf. das System der Flächen $\varphi^{(r)}$ niedrigster Ordnung r mit einer $(r - 2)$ -fachen Basisgeraden und weiteren Basiscurven und -punkten. Die so gefundenen typischen Systeme werden dann auch im linearen affinen S_3 analytisch ausgedrückt. Da die Gesamtergebnisse hier nicht wiedergegeben werden können, sei wenigstens erwähnt, daß die Ordnung r der $\varphi^{(r)}$ die Werte 3, 4, 5, 6 annehmen kann, während der Grad n die Ungleichung $4 \leq n \leq 12$ erfüllt. — Ein Flächensystem $|\varphi|$ mit den im vorangehenden besprochenen Eigenschaften hat die Dimension gleich dem

Grad n ; das projektive Bild dieses Systems ist daher eine normale algebraische Mannigfaltigkeit V_3^n der Dimension 3 und Ordnung n mit ebenen Schnittkurven des Geschlechtes 2, die in einen linearen S_n eingebettet ist. Verf. untersucht nun diese V_3^n und zeigt, daß sie entweder ein Ebenenbüschel vom Geschlechte $\pi = 2$ enthält oder rational ist. Im letzten Falle handelt es sich entweder um eine V_3^4 eines S_4 , die eine Doppelebene besitzt, oder um eine V_3^5 des S_5 , die man erhält, indem man einen quadratischen S_1 - oder S_2 -Kegel M_4^2 mit einer kubischen Fläche schneidet, die durch einen S_3 jenes Kegels hindurchgeht, oder schließlich um eine V_3^n eines S_n ($6 \leq n \leq 12$), die als Schnitt einer rationalen normalen passenden M_4^{n-3} mit einer Hyperquadrik dargestellt werden kann, die durch $n - 6$ S_3 der M_4^{n-3} geht. Für $n = 11$ und $n = 12$ erhält man so einen Kegel. Aus diesen Ergebnissen folgt dann die Klassifikation der Linearsysteme $|\varphi|$.

L. Campedelli (Firenze).

Severi, Francesco: Sulla classificazione delle rigate algebriche. Rend. Mat. Univ. Roma, V. s. 2, 1—32 (1941).

Die gestellte Aufgabe besteht in der Bestimmung der Familien von Regelflächen der Ordnung n und des Geschlechtes p (≥ 1) in einem S_d ($d \geq 3$). Verf. nennt „abstrakte Regelfläche“ des Geschlechtes p jede Fläche F , die ein Büschel von rationalen Kurven besitzt, die „Erzeugende“ genannt werden. Nach einem bekannten Satze von Enriques kann jede abstrakte Regelfläche F in eine Regelfläche im projektiven Sinne birational transformiert werden, so daß auf F immer „Leitkurven“ existieren, die die Erzeugenden in einem Punkte schneiden. Vom Standpunkte der birationalen Transformationen aus wird F durch die $3p - 3 + \zeta$ ($\zeta = 1$ für $p = 1$, $\zeta = 0$ für $p > 1$) Moduln des Büschels der Erzeugenden bestimmt. Verf. betrachtet immer, wie es ja möglich ist, abstrakte Regelflächen, die frei von singulären Punkten und ausgezeichneten Kurven erster Art sind. Um die gestellte Aufgabe zu lösen, wäre es nötig, auf F für alle Werte der Moduln die Linearsysteme von Leitkurven zu bestimmen, die irreduzibel, einfach, ∞^d und vom effektiven Grade n sind. Um der Lösung dieses Problems näher zu kommen, ist also eine vorläufige Untersuchung der Gesamtheit der Leitkurven auf F notwendig. — Durch Anwendung bekannter Sätze der algebraischen Geometrie und speziell der Basistheorie, der Äquivalenzkriterien und der Theorie der vollständigen kontinuierlichen Kurvensysteme auf F werden folgende, für unsere Frage wichtigen Eigenschaften bewiesen: 1. Jede Leitkurve vom virtuellen Grad $n > 2p - 2$ ist effektiv, so daß man von den effektiven Leitkurven vom virtuellen Minimalgrad $\nu > 2p - 2$ sprechen kann. 2. Es existieren irreduzible Leitkurven, die in Linearsystemen beliebig hohen Grades und beliebig hoher Dimension veränderlich sind. 3. Alle irreduziblen Leitkurven mit bestimmtem virtuellen Grad $n > 2p - 2$ gehören einem einzigen vollständigen System an, das als Mannigfaltigkeit von Linearsystemen irreduzibel ist. 4. Für $n \geq \nu + 2p + 2$ bestimmt jede Leitkurve vom virtuellen Grade n ein Linearsystem einer Dimension $\geq \nu + 3$. — Betrachten wir nun auf F ein Linearsystem $|C|$ von Leitkurven, das irreduzibel, einfach und mindestens ∞^3 sei. Verf. beweist, daß $|C|$ das Bild eines Kegels ist, sobald $|C|$ eine Fundamentalkurve besitzt, die keine Erzeugende ist. Da die Klassifikation der Kegel keine Schwierigkeiten bereitet, so kann man immer voraussetzen, daß $|C|$ keine Fundamentalkurven besitze, die nicht Erzeugende seien. Hieraus folgt, daß die Regelflächen, die keine Kegel sind, nur im erweiterten Sinne gewöhnliche Singularitäten besitzen, da fundamentale Erzeugende dann und nur dann vorkommen können, wenn $|C|$ (notwendig) einfache Basispunkte besitzt und sie daher einfache Punkte darstellen. Nennt man nun zwei abstrakte Regelflächen von „derselben Art“, wenn sie birational ohne Ausnahme (zwischen den Mänteln) äquivalent sind, so ist das Bild einer projektiven Regelfläche, die kein Kegel ist, auf einer birational äquivalenten abstrakten Regelfläche derselben Art frei von Basispunkten und von Fundamentalkurven. Um unsere ursprüngliche Aufgabe zu lösen, wäre es also hinreichend, auf den abstrakten Regelflächen jeder Art und für alle möglichen Werte der Moduln alle Linearsysteme von Leitkurven zu konstruieren, die

irreduzibel, einfach, ∞^d , basispunktfrei und ohne Fundamentalkurven sind. In dieser Allgemeinheit gelingt es nicht, das Problem zu lösen, so daß sogar zweifelhaft bleibt, ob immer eine projektive Regelfläche existiert, die birational identisch ohne Ausnahme mit einer abstrakten Regelfläche gegebener Art ist. Es scheint dann zweckmäßig, sofort von den projektiven Regelflächen auszugehen. Mit einer direkten Konstruktion beweist Verf., daß immer projektive Regelflächen Φ , des Geschlechtes $p \geq 1$, existieren, die die willkürliche Ordnung $n \geq 2p + 6$ und willkürliche Moduln besitzen und in einem S_r mit $r = n - 2p + 1$ normal sind. Hieraus und aus den Eigenschaften der Leitkurven auf F (speziell Eigenschaft 3) folgt, daß die Regelflächen Φ , die dem S_r ($r = n - 2p + 1$) angehören, eine einzige irreduzible Familie $W^{(r)}$ bilden, die die Dimension $\Delta^{(r)} = n(n+4) - 4p(n-p+1) - \xi^{(r)} - \eta^{(r)} + \zeta$ hat; hier bedeutet $\xi^{(r)}$ die Dimension des Systems der Homographien, die die allgemeine Φ in sich transformieren, und $\eta^{(r)}$ die Dimension der Mannigfaltigkeit der Linearsysteme desselben kontinuierlichen Systems, die auf F das Bild derselben (bis auf eine Homographie definierten) Φ sind. $\xi^{(r)}$ und $\eta^{(r)}$ sind nur für projektiv spezielle Regelflächen nicht Null. Der Fall, wo die Φ einem S_d mit $d < n - 2p + 1$ angehören, läßt sich leicht abfertigen. — Existiert in einem S_d eine irreduzible Familie von Regelflächen der Ordnung n , des Geschlechtes p , die normal in einem S_r (wo nach dem Riemann-Rochschen Satz $r \geq n - 2p + 1$ ist) sind und willkürliche Moduln haben, so kann man beweisen, daß die Dimension der Familie i. a. mindestens gleich $(d+1)n - 2(d-1)(p-1)$ ist; die Ausnahmefälle werden charakterisiert. Natürlich kann man jetzt nicht sagen, ob die Familie die einzige sei.

Viele Fragen bleiben noch offen, um die vollständige Lösung des Problems zu gewinnen. Verf. vertieft sie absichtlich nicht, da die ganze Untersuchung im vom Verf. gehaltenen geometrischen Seminar beim Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica in Rom entstanden ist, um den Zuhörer weiteres Untersuchungsmaterial zu schaffen. Ungelöste Fragen sind z. B. folgende: 1. Untersuchung der (stets existierenden) Leitkurven, die den minimalen (auch negativen) virtuellen Grad besitzen. 2. Gibt es stets zu jeder abstrakten Regelfläche eine projektive Regelfläche, die mit ihr birational identisch und von derselben Art ist? 3. Bestimmung der Familien von Regelflächen, für welche die Ordnung klein im Vergleich zum Geschlecht ist, und der Familien von Regelflächen mit speziellen Moduln (diese letzte Frage ist besonders schwierig). Zuletzt bemerken wir, daß für zwei abstrakte Regelflächen derselben Art die Minimalgrade identisch sind. (Es ist zweifelhaft, ob diese Bedingung auch hinreichend ist.) Der Minimalgrad erscheint so als ein arithmetischer Modul. *Conforto (Roma).*

Godeaux, Lucien: Remarques sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation. Bull. Sci. math., II. s. 64, 245—256 (1940).

Auf einer algebraischen Fläche F sei eine zyklische Involution I_p der Primzahlordnung p mit nur einer endlichen Anzahl von Ruhepunkten gelegen; Φ sei die Bildfläche dieser Involution und besitze dementsprechend eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten, wenn sie als zyklische p -fache Fläche aufgefaßt wird. Φ und F sind birational identisch, und die Verzweigungspunkte von Φ , denen Punktgruppen der I_p entsprechen, die mit Koinzidenzen behaftet sind, sind für Φ isolierte mehrfache Punkte. Schon 1937 hat L. Godeaux [C. R. Acad. Sci., Paris 205, 1030—1031 (1937); Ann. École norm. sup., 3. s. 55, 193—222 (1938); dies. Zbl. 17, 324; 20, 161] die Singularität von Φ in einem Verzweigungspunkte A' untersucht und insbesondere den Fall verfolgt, in dem der Berührungskegel in A' an Φ in zwei irreduzible Teile zerfällt. Seine damaligen Ergebnisse sind die folgenden: Es bezeichnen n_1, n_2 die Ordnungen der beiden Kegel, die den Berührungskegel von A' zusammensetzen, so daß $n_1 + n_2$ die Vielfachheit von A' auf Φ ist; diese beiden notwendig rationalen Kegel haben eine einzige Erzeugende gemein, und Φ besitzt in der Nachbarschaft von A' k aufeinanderfolgende biplanare Doppelpunkte. Der letzte derselben ist entweder ein gewöhnlicher biplanarer Doppelpunkt, oder ihm folgt ein weiterer konischer Doppelpunkt, je nachdem $p - n_1 - n_2$ gleich $(2k+1)n_1n_2$ oder gleich $2(k+1)n_1n_2$ ist. In vorliegender Arbeit gibt Verf. einen neuen einfacheren Beweis dieser Tatsache mit einigen Ergänzungen und Anwendungen, die sich auf den Fall $n_1 = 1, n_2 = 2$ beziehen.

L. Campedelli (Firenze).

Godeaux, Lucien: Remarques sur une involution appartenant à une surface du cinquième ordre. An. Fac. Ci. Pôrto 25, 193—198 (1940).

Die Fläche F_5 mit der Gleichung

$$a_1 x_1^4 x_2 + a_2 x_2^4 x_3 + a_3 x_3^4 x_1 + a_4 x_4^5 + a_5 x_1 x_2 x_3 x_4^2 = 0$$

ist i. a. frei von vielfachen Punkten und hat daher die Geschlechter $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 6$; ihre ebenen Schnitte sind die kanonischen Kurven. Die zyklische Homographie der Periode 13 mit den Gleichungen

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^{10} x_3 : \varepsilon^8 x_4 \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{13}} \right),$$

transformiert F_5 in sich und erzeugt auf ihr eine zyklische Involution J_{13} , welche nur drei Ruhepunkte besitzt, und zwar $O_1(1, 0, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0, 0)$, $O_3(0, 0, 1, 0)$. — Setzt man $X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^4 x_2 : x_2^4 x_3 : x_3^4 x_1 : x_4^5$, so führt die Elimination der x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) aus diesen Gleichungen und der Gleichung von F_5 zu der Fläche Φ_5 mit der Gleichung $\varphi^5 + a_5^5 X_1 X_2 X_3 X_4^2 = 0$ ($\varphi = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4$), deren Punkte birational den Gruppen der J_{13} auf F_5 entsprechen. Die Untersuchung der Singularitäten der Φ_5 gestattet den Schluß, daß für sie $p_a = p_g = 1$ ist. Außerdem gestattet die Untersuchung der durch die J_{13} in sich transformierten kanonischen Kurven der F_5 und der ihnen auf Φ_5 entsprechenden Kurven den Schluß, daß für Φ_5 $p^{(1)} = 1$ ist. — Darauf untersucht Verf. die Struktur des Ruhepunktes O_1 (und ähnlich von O_2, O_3), indem er von geeigneten quadratischen Transformationen und von dem linearen Flächensystem $\lambda_1 x_1^4 x_2 + \lambda_2 x_2^4 x_3 + \lambda_3 x_3^4 x_1 + \lambda_4 x_4^5 + \lambda_5 x_1 x_2 x_3 x_4^2 = 0$ Gebrauch macht. Es ergibt sich, daß von O_1 zwei Folgen von 3 bzw. 4 schrittweise benachbarten Ruhepunkten ausgehen; der letzte Ruhepunkt jeder Folge ist nach der Bezeichnung des Verf. ein vollkommener Ruhepunkt, dessen Bild auch auf Φ_5 gefunden wird.

Conforto (Roma).

Sz. Nagy, Gyula v.: Zur Theorie der Flächen vom Maximalindex. J. reine angew. Math. 183, 129—147 (1941).

Es werden Flächen \mathfrak{F} im R_3 betrachtet, welche unter anderem stetige Tangential-ebenen besitzen sowie keine Ebenen- und Punktschalen. Unter der Ordnung $O(\mathfrak{F})$ bzw. dem Index $j(\mathfrak{F})$ bzw. dem Rang $R(\mathfrak{F})$ von \mathfrak{F} wird verstanden das Maximum der Anzahl der Schnittpunkte von \mathfrak{F} mit den nicht in der Fläche liegenden Geraden (jeder Schnittpunkt mit seiner Vielfachheit gezählt) bzw. das Minimum der Anzahl dieser Schnittpunkte bzw. das Maximum der Klasse der ebenen Schnitte von \mathfrak{F} oder, was das gleiche ist, die maximale Ordnung der Berührkegel an \mathfrak{F} . Es ist $j(\mathfrak{F}) \leq O(\mathfrak{F}) - 2$. Unter dem Geschlecht $p(\mathfrak{F})$ von \mathfrak{F} wird verstanden $p(\mathfrak{F}) = \binom{n-1}{2} - (\delta + r)$, wo δ bzw. r die Anzahl der in \mathfrak{F} enthaltenen Doppelgeraden bzw. Rückkehrkanten bezeichnet und $n = O(\mathfrak{F})$ ist. \mathfrak{F} heißt reduzibel (zerfallend), wenn ihre Schalen sich so in mindestens zwei (nicht leere) Systeme teilen lassen, daß $O(\mathfrak{F})$ gleich ist der Summe der Ordnungen der Flächen, die von den in je einem der Systeme enthaltenen Schalen gebildet werden; andernfalls heiße \mathfrak{F} irreduzibel. Im folgenden sind alle Flächen vom Maximalindex, d. h. $O(\mathfrak{F}) = j(\mathfrak{F}) + 2$. Aus den zahlreichen in der Arbeit gewonnenen Ergebnissen seien die folgenden erwähnt (vgl. auch dies. Zbl. 12, 84; 18, 332; 22, 77): 1) Es ist $R(\mathfrak{F}) \leq n(n-1) - 2\delta - 3r$. 2) Es ist $-\left[\frac{n}{2}\right] + 1 \leq p(\mathfrak{F}) \leq n - 2$, wenn $n = O(\mathfrak{F})$ und $[x]$ die größte ganze, in x enthaltene Zahl bezeichnen; die Anzahl der irreduziblen Teile von \mathfrak{F} ist $\leq \left[\frac{n}{2}\right]$; für $p > n - 5$ ist \mathfrak{F} irreduzibel, für $p > n - 2 - 3k$ zerfällt \mathfrak{F} in höchstens k irreduzible Teile; für $p = -\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ zerfällt \mathfrak{F} in $\left[\frac{n}{2}\right]$ irreduzible Flächen, von denen höchstens eine die Ordnung 3, alle übrigen aber die Ordnung 2 besitzen. 3) Enthält \mathfrak{F} keine Regel- und keine Kegelflächen, so heiße \mathfrak{F} eine gewöhnliche Fläche \mathfrak{G} . Existenzsätze: Es gibt einschalige \mathfrak{G} für jedes $n \geq 3$ mit $O(\mathfrak{G}) = n$, $p(\mathfrak{G}) = 1$; ferner für jedes gerade n mit $O(\mathfrak{G}) = n$, $p(\mathfrak{G}) = 0$; es gibt p -schalige \mathfrak{G} für jedes $n \geq 3$

und $1 \leq p \leq n-2$ mit $O(\mathfrak{G}) = n$, $p(\mathfrak{G}) = p$; es gibt $(n-1)$ -schalige \mathfrak{G} für jedes n mit $2 \leq n \leq 6$ und $O(\mathfrak{G}) = n$. Es gibt für jedes $n \geq 2$ bzw. $n \geq 3$ einschalige \mathfrak{F} mit $O(\mathfrak{F}) = n$, $p(\mathfrak{F}) = n-2$ bzw. $p(\mathfrak{F}) = n-3$; für $p \geq 2$ ist \mathfrak{F} eine \mathfrak{G} . 4) Den Regelflächen \mathfrak{R} (vom Maximalindex) wird eine eingehende Untersuchung gewidmet. I) Jede einschalige \mathfrak{R} hat $p(\mathfrak{R}) = 0$. II) Zu beliebigen ganzen Zahlen $n_1 \geq 2$, $n_2 \geq 2$ gibt es \mathfrak{F} mit $O(\mathfrak{F}) = n_1 + n_2$, so daß \mathfrak{F} Summe zweier \mathfrak{R} von n_1 -ter bzw. von n_2 -ter Ordnung ist; es ist dann $p(\mathfrak{F}) = -1$. Es gibt aber keine \mathfrak{F} mit mehr als zwei \mathfrak{R} -Schalen. Zerfällt \mathfrak{F} in zwei Flächen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$, von denen \mathfrak{F}_1 eine \mathfrak{R} mit $O(\mathfrak{R}) > 2$ ist, so ist auch \mathfrak{F}_2 eine \mathfrak{R} . III) Eine \mathfrak{R} mit $k \geq 2$ Schalen hat $p(\mathfrak{R}) = 1 - k$ und zerfällt in ihre k Schalen. Haupt (Erlangen).

Differentialgeometrie:

Soens, M.: Verallgemeinerung eines Satzes von W. H. Talbot und einiger Formeln von W. Roberts. Wis- en Natuurkdg Tijdschr. 10, 132—137 (1941) [Flämisch].

$r = a \cos \frac{\vartheta}{n}$ sei in Polarkoordinaten die Gleichung einer Sinusspirale „vom Index n “.

Sie besteht aus endlich oder unendlich vielen kongruenten Bogen, je nachdem n rational oder irrational ist. Einer dieser Bogen, B_n , geht durch den Punkt $(a, 0)$. s_n sei die Länge des Stücks von B_n zwischen den Punkten $(a, 0)$ und (r, ϑ) mit $0 < \vartheta < |n| \cdot \frac{\pi}{2}$.

Definiert man dann $\sigma(n) = \lim(r - s_n)$, wenn $n < 0$ ist (für $\lim \vartheta = -n \frac{\pi}{2}$), und $\sigma(n) = \lim s_n$, wenn $n > 0$ ist (für $\lim \vartheta = n \frac{\pi}{2}$), so lautet der Talbotsche Satz [W. H. Talbot, Ann. Math. pures appl. de Gergonne 13, 248 (1822)]

$$(1) \quad \sigma(-\tfrac{1}{2})\sigma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}\pi a^2.$$

W. Roberts [J. Math. pures appl. 12, 41—49 (1847)] erhielt ferner folgende Formeln:

$$(2) \quad \sigma\left(\frac{4p-1}{2}\right)\sigma\left(\frac{4q+1}{2}\right) = \left(\frac{4p-1}{4p-3} \frac{4p-5}{4p-7} \cdots \frac{3}{1}\right) \left(\frac{4q+1}{4q-1} \frac{4q-3}{4q-5} \cdots \frac{5}{3}\right) \frac{\pi a^2}{4},$$

$$(p, q = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(3) \quad \sigma\left(\frac{2p-1}{2}\right)\sigma\left(\frac{2p+1}{2}\right) = \frac{2p+1}{4}\pi a^2; \quad (4) \quad \sigma\left(\frac{2p+1}{2}\right) = \frac{2p+1}{2p-1} \cdot \sigma\left(\frac{2p-3}{2}\right) \quad (p=1, 2, 3, \dots).$$

Verf. findet als Verallgemeinerungen der Talbotschen Formel die beiden Gleichungen

$$(1') \quad \sigma(n)\sigma(n+1) = \frac{n+1}{2}\pi a^2; \quad (2') \quad \sigma(-n)\sigma(n) = \frac{1}{2}\pi a^2 \cdot n \cot n \frac{\pi}{2} \quad (0 < n < 2).$$

Als Verallgemeinerung der Robertsschen Formeln (2) und (3) und zugleich der Formel (1') ergibt sich

$$(3') \quad \sigma(n)\sigma(n+2\alpha+1) = \frac{n+1}{2} \frac{n+3}{n+2} \frac{n+5}{n+4} \cdots \frac{n+2\alpha+1}{n+2\alpha} \pi a^2,$$

und die Formel (4) wird verallgemeinert durch die aus (1') (durch Division mit der aus (1') durch Ersatz von n durch $n+1$ hervorgehenden Gleichung) entstehende Formel

$$(4') \quad \sigma(n+2) = \frac{n+2}{n+1} \sigma(n). \quad (n > 0)$$

Max Zacharias (Berlin).

Myller A.: La courbe SMJ. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. 27, 127—135 (1941).

Die vom Verf. als SMJ (Séminaire Math. Jassy) bezeichnete Kurve hat die kennzeichnende Eigenschaft, daß der Abstand der Tangente von einem festen Punkt stets proportional dem Abstand des Berührungspunktes von einer festen Geraden ist. Eine Parameterdarstellung lautet

$$x = [c t^{m+1} - a(m+1)t^2 - a(m-1)]:(t^2+1),$$

$$y = [c(m-1)t^{m+2} - c(m+1)t^m + 4amt]:2m(t^2+1).$$

Es folgt die gestaltliche Diskussion dieser Kurven. Mittels ihrer kann man durch Be-

wegung Flächen erzeugen, bei denen die Krümmungslinien einer Schar in Ebenen durch eine Gerade liegen und zueinander ähnlich sind. *Harald Geppert.*

Charrueau, André: *Sur une transformation géométrique utilisée dans l'étude de l'équilibre d'un solide élastique.* Ann. ponts et chaussées **110**, **1**, 127—146 (1940).

Verf. studiert die geometrischen Eigenschaften einer Transformation, die bei der Untersuchung des Gleichgewichts von elastischen Körpern auftritt. — Bezeichnen N und T die Koordinaten eines Punktes A einer Kurve L in der xy -Ebene, so daß $T' = \frac{dT}{dN}$ ist, und ist C der Schnittpunkt der Normalen im Punkte A an die Kurve L mit der x -Achse, so wird um C der Kreis konstruiert, der durch A hindurchgeht. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der x -Achse werden mit N_1 und N_2 bezeichnet, und zwar ist N_1 der Punkt, der die kleinere Abszisse hat, falls $T > 0$ ist. Ist $T < 0$, so hat der Punkt N_2 die kleinere Abszisse. Dann lautet die Transformation:

$$N_1 = N + TT' - T\sqrt{1 + T'^2}; \quad N_2 = N + TT' + T\sqrt{1 + T'^2},$$

N_1 und N_2 sind Funktionen von N . Verf. untersucht insbesondere die Berührungstransformation, deren Grundgleichung die folgende Form besitzt:

$$N^2 + T^2 - (N_1 + N_2)N + N_1N_2 = 0.$$

Wegner.

Deà, Modesto: *Su alcune configurazioni proiettivamente rigide.* Boll. Un. Mat. ital., II. s. **3**, 307—310 (1941).

In einer Ebene seien zwei Kurven gegeben, die in einem Punkte P eine Berührung der Ordnung $k > 1$ eingehen. Ihre zu P gehörigen Elemente ($k + 2$)-ter Ordnung bestimmen dann ein projektives Bezugssystem (Dreieit und Einheitspunkt) und bilden daher eine projektiv-starre Konfiguration. Das Ergebnis gilt für im projektiven Sinne allgemeine Elemente. *E. Bompiani (Roma).*

Green, Louis: *Twisted cubics associated with a space curve.* Amer. J. Math. **62**, 285—306 (1940).

Ausgehend von einer kanonischen Form für die Differentialgleichungen einer Raumkurve Γ (als Punktort oder als Einhüllende von Schmiegungebenen aufgefaßt) führt Verf. ein örtliches Bezugstetraeder und entsprechende örtliche Potenzreihenentwicklungen ein. Er bedient sich dieser Entwicklungen bei der Untersuchung der Kubiken T_a , die eine fünfpunktige Berührung mit Γ in einem ihrer Punkte O haben und alle dem gleichen Nullsystem angehören. Er betrachtet darauf die zu Γ und T_a gehörigen Torsen und untersucht ihre gegenseitigen Schnitte sowie diejenigen mit Ebenen durch O , wie auch die Quadriken, welche T_a enthalten und mit Γ in O eine sechspunktige Berührung eingehen. In den 20 bewiesenen Sätzen kommen bekannte geometrische Elemente von Halphen und Bompiani und verschiedene Hinweise auf Untersuchungen von Sannia, Kanitani (dies. Zbl. **7**, 364), Tsuboko (dies. Zbl. **16**, 180) und Su (dies. Zbl. **17**, 34) vor. *P. Buzano (Torino).*

Pantazi, Al: *Sur une classification nouvelle des tissus plans.* C. R. Inst. Sci. Roum. **4**, 230—232 (1940).

Neue Klassifikation der ebenen n -Gewebe, die mit der Einteilung nach dem Range in noch nicht ganz geklärtem Zusammenhang steht und sich rechnerisch besser erfassen läßt. Verf. stellt einige in Sonderfällen bewiesene Vermutungen über diese Gewebeklassen auf. — Die als Nebenergebnis sich ergebende Kennzeichnung der ebenen Kurven n -ter Klasse ist in der gegebenen Formulierung sicher nicht richtig, wie schon das Beispiel des Kreises zeigt. *Bol (Greifswald).*

Egerváry, E.: *Über die Kurven des n -dimensionalen euklidischen Raumes.* Mat. természett. Értes. **59**, 787—795 u. dtsh. Zusammenfassung 796—797 (1940) [Un-garisch].

Es handelt sich in der Arbeit um die Krümmungen der Kurven des n -dimensionalen euklidischen Raumes, die durch n -mal stetig nach der Bogenlänge s differenzierbare Parameterfunktionen $x_\nu = x_\nu(s)$ ($\nu = 1, \dots, n$) bestimmt sind. Die

übliche Definition von $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ verallgemeinernd, wird die k -te ($k = 1, \dots, n$) Krümmung im Punkt $P(s_0)$ als $\frac{1}{\varrho_k} = \lim_{s_1, s_2 \rightarrow s_0} \frac{\eta_k(s_1, s_2)}{s_2 - s_1}$ definiert, wobei $\eta_k(s_1, s_2)$ den Winkel der in $P(s_1)$ und $P(s_2)$ gebildeten k -dimensionalen Schmiegungräume bedeutet. Für diese ergibt sich der Ausdruck $\frac{1}{\varrho_k} = \sqrt{G_{k+1}G_{k-1}/G_k}$, wobei $G_k = |X_{ij}|$

die Gramsche Determinante mit den Elementen $X_{ij} = \sum_{\nu=1}^n \frac{d^i x_\nu}{ds^i} \frac{d^j x_\nu}{ds^j}$ ($i, j = 1, \dots, k$) bezeichnet ($G_0 = 1$). Es wird

$$\frac{1}{\varrho_k} = \frac{(k+1)^2}{k} \lim_{s_2 \rightarrow s_0} \frac{V(P_1 \dots P_{k+2}) V(P_2 \dots P_{k+1})}{V(P_1 P_{k+2}) V(P_1 \dots P_{k+1}) V(P_2 \dots P_{k+2})}$$

bewiesen, wobei $V(P_1 \dots P_h)$ den $(h-1)$ -dimensionalen Inhalt des Sehnensimplexes $[P(s_1), \dots, P(s_h)]$ bedeutet; dadurch wird eine Definition der Krümmungen auch in allgemeinen (durch eine Entfernungsrelation) metrisierten Räumen ermöglicht. Unter Benutzung der $\frac{1}{\varrho_k}$ erhalten die verallgemeinerten Frenetschen Gleichungen eine dem dreidimensionalen Fall analoge einfache Form, aus welcher gefolgert wird, daß die $\frac{1}{\varrho_k}$ mit den von W. Blaschke [Math. Z. 6, 94—99 (1920)] formal eingeführten Krümmungen übereinstimmen. G. Hajós (Budapest).

Egerváry, E.: Über die Schmiegunskugeln der Kurven des n -dimensionalen euklidischen Raumes. Mat. természett. Értes. 59, 775—784 u. dtsh. Zusammenfassung 785—786 (1940) [Ungarisch].

R_k bedeutet ($k = 1, \dots, n-1$) den Radius der k -dimensionalen Schmiegunskugel zur Kurve $x_\nu = x_\nu(s)$ (vgl. vorstehendes Referat). Mit Hilfe der Erweiterung (auf Funktionen zweier Variablen) eines Schwarzschen Mittelwertsatzes werden die R_k durch die Parameterfunktionen x_ν ausgedrückt, was die Ableitung der übrigen Resultate ermöglicht. Ist $\Delta_k = \varepsilon \sqrt{R_k^2 - R_{k-1}^2}$ (wobei ε ein gewisses geeignetes Vorzeichen ist; $R_0 = 0, \Delta_0 = 0$), so gilt für $k = 1, \dots, n-2$ die auch durch elementargeometrische Betrachtungen bewiesene Formel:

$$R_k^2 \left(\frac{dR_k}{ds} \right)^2 = \Delta_k^2 \left(\frac{\Delta_{k+1}}{\varrho_{k+1}} \right)^2$$

und in bemerkenswerter Analogie zu den verallgemeinerten Frenetschen Gleichungen:

$$\frac{d\Delta_k}{ds} = -\frac{\Delta_{k-1}}{\varrho_k} + \frac{\Delta_{k+1}}{\varrho_{k+1}};$$

ist $k = n-1$, so ist in beiden Formeln statt des bedeutungslosen $\frac{\Delta_n}{\varrho_n}$ der Differentialquotient $\frac{d\sigma}{ds}$ zu nehmen, wobei σ die Bogenlänge der durch die Schmiegunskugelmittelpunkte beschriebenen Polkurve ist. Aus den ersten dieser Formeln wird gefolgert, wann ein R_k konstant sein kann. Mittels der zweiten können die R_k durch die Krümmungen (und ihre Ableitungen) ausgedrückt werden. Alle erhaltenen Sätze und Formeln führen zu bekannten Spezialfällen für den dreidimensionalen Raum; eine von J. G. Hardy [Amer. J. Math. 24, 13—38 (1902)] stammende Formel für R_3 im vierdimensionalen Raum wird auch als Spezialfall erkannt. G. Hajós (Budapest).

Cotton, E.: Sur l'intersection de deux surfaces données par les trièdres mobiles. C. R. Soc. Math. France année 1938, 43—44 (1939).

Brauner, K., und Hans Robert Müller: Über Kurven, welche von den Endpunkten einer bewegten Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden. Math. Z. 47, 291—317 (1941).

Zunächst untersuchen Verff. diejenigen ebenen Kurven C , in denen eine Sehne der Länge $2L$ so bewegt werden kann, daß sie immer den gleichen Kurvenbogen σ umspannt. Verff. zeigen, daß ein Anfangsstück der Länge σ von C beliebig vorgegeben werden kann und die Bewegungsmöglichkeiten der Sehne durch eine Riccatische Diffe-

rentialgleichung bestimmt werden. Damit wird eine frühere Arbeit des Ref. (dies. Zbl. 22, 266) berichtigt. Die Erzeugung von C aus der Mittenkurve der betrachteten Sehnen führt dann zu Kennzeichnungen des Kreises und der Zindlerschen Kurven. — Zu schönen Ergebnissen führt die Ausdehnung der Fragestellung auf den Raum. Bewegt man eine Strecke der Länge $2L$ im Raume so, daß die Endpunkte ihre Bahnkurven C, C' mit jeweils gleicher Geschwindigkeit durchlaufen, so erzeugt sie eine Regelfläche F , auf der die Streckenmittenkurve I' Kehllinie ist. Neben dieser neuen Deutung der Kehllinie erweitern Verff. auch deren klassische Definition, indem sie zeigen, daß sie als Grenzort der Fußpunkte der Geraden aufgefaßt werden kann, die man zwischen benachbarte Erzeugende so einpassen kann, daß sie sie unter festem, aber beliebigem Winkel schneiden. Zwei Kurven auf F , die auf den Erzeugenden Strecken konstanter Länge abschneiden, heißen Abstandskurven. Denkt man sich zwei Abstandskurven gleicher Bogenlänge C, C' als biegsame Fäden, die zwischen ihnen liegenden Erzeugendenstücke als Stäbchen, so erhält man eine bewegliche „Strickleiter“, mittels derer man z. B. durch Anlegen des Kehlstreifens an einen beliebigen Flächenstreifen die Levi-Civitasche Parallelübertragung demonstrieren kann. Paßt man in eine Strickleiter die Abstandskurven der Kehllinie als biegsame Fäden ein, so erhält man ein „Stabnetz“. Besitzen zwei Regelflächen das gleiche Stabnetz, so gehen sie auseinander durch „Verwindung“ hervor; in der auf die Kehllinie $\eta(s)$ als Leitkurve bezogenen Flächendarstellung $\mathfrak{x}(s, t) = \eta(s) + t\nu(s)$ ist dann $w(s) = \nu'^2$ eine Invariante der Verwindung. Die durch Verwindung auseinander entstehenden Regelflächen bilden eine Verwindungsklasse; innerhalb einer solchen gehen genau diejenigen Flächen durch Verbiegung auseinander hervor, bei denen die entsprechenden Erzeugenden gleiche Schnittwinkel mit der Kehllinie bilden. Flächentreue Verwindung ist Verbiegung, daher kann man nach dem größten bzw. kleinsten Flächeninhalt eines von zwei Erzeugenden und zwei Abstandskurven begrenzten Stabnetzes bei allen Verwindungen fragen; der erste wird bei der Binormalenfläche der Kehllinie, der zweite bei ihrer Tangentenfläche erreicht. — Die Problemstellung des Eingangs führt nun auf solche Regelflächen, die mindestens ein Paar zugeordneter Abstandskurven besitzen, die sich zu einer einzigen Kurve C zusammenschließen. Auch hier ist die Willkür in der Erzeugung sehr groß; speziell kann der Fall eintreten, daß durch jeden Punkt von C eine einzige Lage der bewegten, zur Erzeugung benutzten Strecke hindurchgeht; dies ist die Verallgemeinerung der Zindlerschen Kurven. Alle geodätischen Streifen mit ungerader Verdrillungszahl führen zu Kehlbändern von Regelflächen (die Erzeugenden sind ihre Binormalen), deren sämtliche Abstandskurven geschlossen sind; ein Beispiel wird ausgeführt.

Harald Geppert (Berlin).

Hauer, F.: Flächentreue Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene durch Systeme geringster Streckenverzerrung. Z. Vermessungswes., Stuttgart. 70, 194—215 (1941).

Es wird die Abbildung verhältnismäßig kleiner Bereiche eines Rotationsellipsoids in die Ebene behandelt; der Maßstab der so entstehenden Karte soll größer als $1:10^5$ sein. Dazu werden die Abbildungsfunktionen $x = x(m, p)$, $y = y(m, p)$, worin m und p die Längen der Meridian- und Parallelkreisbogen am Ellipsoid, gemessen von einem Zentralpunkt im Innern des abzubildenden Bereiches, bedeuten, in Potenzreihen nach m und p entwickelt und die dabei auftretenden Koeffizienten aus den Forderungen geringster Strecken- und Winkeilverzerrungen sowie gewisser Symmetrieeigenschaften bestimmt. Die ausführliche Durchrechnung und Diskussion dieses Ansatzes führt auf drei Abbildungssysteme geringster Streckenverzerrung, je nachdem der abzubildende Ellipsoidbereich die Grundgestalt einer sphärischen Kalotte, eines Meridianstreifens oder eines Parallelstreifens besitzt. Die Abbildungen haben die Eigenschaften, in ihrem Gesamtgebiete bis auf kleine Größen 3. Ordnung einschließlich in den Abbildungsgleichungen bzw. kleine Größen 2. Ordnung einschließlich in den Verzerrungsgrößen flächentreu und rechtschnittig und außerdem bis auf kleine Größen 2. Ordnung

einschließlich in den Abbildungsgleichungen bzw. kleine Größen 1. Ordnung einschließlich in den Verzerrungsgrößen streckentreu und winkeltreu zu sein. Ein Beispiel, das sich auf die Abbildung des gesamten Deutschen Reiches bezieht, zeigt die zahlenmäßigen Werte der restlichen Verzerrungsgrößen. *U. Graf* (Danzig).

Touganoff, N.: Sur les lignes situées sur une surface dont la torsion géodésique, la courbure normale et la courbure géodésique sont liées par une relation linéaire à coefficients constants. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **30**, 383—385 (1941).

Vgl. zunächst die in dies. Zbl. **20**, 64 besprochene Arbeit von Touganoff. Diejenigen Kurven C einer Fläche F , bei denen geodätische Windung W_g , geodätische Krümmung k_g und Normalkrümmung k_n durch eine Beziehung der Form $A W_g + B k_n + C k_g + D = 0$ mit konstanten A, \dots, D verknüpft sind, gestatten die Bestimmung einer „adjungierten“ Kurve C_1 des Raumes, deren Punkte und Richtungen mit den aus Tangente, Flächen- und Tangentialnormale von C gebildeten Dreikanten in entsprechenden Punkten invariant verknüpft sind. Ohne Beweise untersucht nun Verf. einige Sonderfälle dieser Zuordnung zwischen C und C_1 ; denkt man sich C_1 auf einer Fläche F_1 gelegen, so daß das entsprechende Darboux'sche Dreikant von C_1 mit demjenigen von C invariant verbunden ist, dann kann man die Beziehungen für k_n, k_g, W_g auf C und C_1 aufstellen; sie zeigen Ähnlichkeit zu den aus der Theorie der Bertrand'schen Kurven geläufigen Relationen. *Harald Geppert* (Berlin).

Llensa, Georges: Sur les systèmes triples orthogonaux doublement L.-D. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 524—526 (1941).

Une famille de surfaces de Lamé, faisant donc partie d'un système triple orthogonal, est dite L. D. lorsqu'elle satisfait à l'équation de Darboux (Leçons sur les systèmes orthogonaux, etc. ch. III). L'A. se propose de trouver les systèmes orthogonaux contenant deux familles L. D. et montre, en la construisant, qu'il y a une solution unique satisfaisant aux conditions initiales suivantes: on peut choisir arbitrairement la courbe γ intersection de deux surfaces particulières appartenant à chacune des familles L. D. et la surface développable se raccordant le long de γ avec l'une de ces deux surfaces particulières. *Al. Pantazi* (Bucarest).

Bompiani, E.: Geometrische Kennzeichnung der Flächen mit der Krümmung Null. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **51**, Abt. 1, 82—100 (1941).

Um die in euklidischen Räumen S_n enthaltenen Flächen $x(u, v)$ verschwindender Krümmung geometrisch zu charakterisieren, genügt es, in den Schmiegerräumen zweiter Ordnung $S(2)$ ihrer Punkte die Matrizengleichung $(x_{uu}x_u x_v) \cdot (x_{vv}x_u x_v) = (x_{uv}x_u x_v)^2$ zu studieren. Ihr Bogenelement soll dabei den Rang zwei haben, also $EG - F^2 \neq 0$ sein. Für den Schmiegerraum zweiter Ordnung $S(2)$ ergeben sich insgesamt drei Möglichkeiten, die wir mit a), b) und c) bezeichnen: a) er ist ein S_3 ; dann, wird gezeigt, ist die Fläche notwendig eine Torse; b) er ist ein S_4 , die Fläche selbst also in einem S_4 oder S_n (n stets größer vier!) enthalten. Dann existiert auf ihr entweder ein Netz konjugierter Kurven oder aber eine Schar von Asymptotenlinien. Im ersten Falle gilt, wie gezeigt wird, folgender Satz [E. Bompiani, Rend. R. Accad. Lincei (5) **28**, 254—258 (1919)]: Eine Fläche des euklidischen S_4 oder S_n , welche ein einziges Netz konjugierter Kurven enthält, ist dann und nur dann von verschwindender Krümmung, wenn in jedem ihrer Punkte die beiden S_3 aufeinander normal stehen, welche die Tangentialebene und die Schmiegerebenen der beiden konjugierten Kurven enthalten. Im zweiten Falle aber, wo eine Schar von Asymptotenlinien existiert, kann man die Tangentialebene jedes Flächenpunktes x und jene seines Nachbarpunktes auf der Asymptotenlinie durch einen (bloß dreidimensionalen) linearen Raum S_3 verbinden (den sogenannten Bitangentenraum, welcher zum Flächenpunkte und der Asymptotenrichtung gehört). Er berührt, im Falle verschwindender Krümmung, die absolute Mannigfaltigkeit Q des S_n ! Es wird geometrisch und analytisch nachgewiesen, daß die Asymptotenkurven einer solchen Fläche stets geradlinig sind. Die erwähnten Bitangentenräume berühren dann die vorhandene Regelfläche

längs ihrer geradlinigen Erzeugenden und sind, wie gesagt, Tangentialräume des absoluten Gebildes Q . Was alles auch so ausgesprochen werden kann: Eine Regelfläche (des S_4 oder S_n), die keine Torse ist, und deren Erzeugenden nicht isotrop sind, hat dann und nur dann die Krümmung Null, wenn auf ihr die beiden Kurven zusammenfallen, welche die Flächenpunkte verbinden, deren isotrope Tangentenrichtungen zusammenfallen. — Alle solchen Regelflächen lassen sich aufstellen! Die Fläche möge zunächst in einem S_4 liegen: Ist S'_3 dessen Fernraum, Q seine absolute Fläche, C_1 eine Kurve auf ihr, Θ die längs C_1 an Q beschriebene Torse, C_2 eine Kurve darauf und C_3 eine Kurve des S_4 , so kann man die Kurven C_2 und C_3 durch ihre Punkte A_2 bzw. A_3 so aufeinander beziehen, daß die Tangente an C_3 in A_3 die Tangentialebene schneidet, die in A_2 an die Torse Θ möglich ist. Die so entstehende Regelfläche der Geraden $[A_2A_3]$ hat verschwindende Krümmung und ist die allgemeinste ihrer Art. — Entsprechende weitläufigere Konstruktionen werden auch für die Fälle angegeben, wo die Fläche in einem Raume S_n liegt. Alle Fälle werden durch konkrete Beispiele belegt. — Es bleibt schließlich noch der allgemeine Fall c) zu behandeln, wo die Schmiegräume zweiter Ordnung $S(2)$ der Fläche fünfdimensional sind. Die Fläche besitzt dann weder ein konjugiertes Netz noch eine Schar von Asymptotenlinien. Es genügt dann, anzunehmen, sie läge ganz in dem Schmiegraum $S(2) = S_5$ darin. [In diesem Falle benötigt man den sogenannten Kegel von Del Pezzo: die Schmiegeebenen der durch einen Flächenpunkt in S_5 in fester Richtung laufenden Flächenkurven liegen in einem durch die Tangentialebene gehenden S_3 ; dieser beschreibt, wenn sich die Tangentenrichtung ändert, in dazu projektiver Weise einen Kegel zweiter Ordnung, wie Del Pezzo fand.] Es wird nun gezeigt, daß eine Fläche mit fünfdimensionalem Schmiegraum zweiter Ordnung dann und nur dann verschwindende Krümmung hat, wenn in einem zur Tangentialebene eines ihrer Punkte normalen, innerhalb des zugehörigen Schmiegraumes S_5 gelegenen Raume S_3 die Schnittkurve zweiter Ordnung mit dem absoluten Gebilde Q und die Schnittkurve zweiter Klasse mit dem Kegel von Del Pezzo apolar sind. Was man auch dahin aussprechen kann, daß der von den geodätischen Normalen in einem Flächenpunkte gebildete Kegel zweiter Klasse und der isotrope Kegel zweiter Ordnung, der in dem im S_5 gelegenen Normal- S_3 der Fläche liegt, apolar sind, was bedeutet, daß der erste Kegel gleichseitig ist. — Die sehr eingehenden Untersuchungen schließen mit einigen prinzipiellen Bemerkungen über die allgemeinen Flächen mit fünfdimensionalem Schmiegraum zweiter Ordnung: Es wird gezeigt, daß es in jedem Punkte einer solchen Fläche ein ausgezeichnetes rechtwinkeliges Koordinatensystem gibt, bestehend aus zwei Tangenten und drei Normalen der Fläche, die durch die einzelnen Umgebungen zweiter Ordnung vollständig bestimmt sind. Die zu diesen Koordinatensystemen gehörigen „kanonischen“ Entwicklungen der Fläche werden bis zu Gliedern zweiter Ordnung angegeben, und es wird gezeigt, daß es in jedem Punkte eine mit der Fläche bis zur zweiten Ordnung übereinstimmende Veronesefläche gibt, welche das genaue Analogon des Schmiegeparaboloids der gewöhnlichen Flächen darstellt.

K. Strubecker (Wien).

Allendoerfer, Carl B.: The Euler number of a Riemann manifold. Amer. J. Math. 62, 243—248 (1940).

Die Arbeit befaßt sich mit einer Verallgemeinerung des Satzes über die „curvatura integra“ geschlossener Flächen. Es wird (als Hauptsatz der Arbeit) die folgende Formel festgestellt:

$$(*) \quad \int_{R_n} K dO = \frac{N}{2} \cdot \omega_n, \quad (n \text{ eine gerade Zahl})$$

wo das Integral über eine geschlossene n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit R_n , die in einer $n + q$ -dimensionalen Euklidischen eingebettet werden kann, erstreckt ist. Der Begriff der „geschlossenen Mannigfaltigkeit“ wird im Sinne von H. Hopf [Differentialgeometrie und topologische Gestalt; Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 41,

209—229 (1932); dies. Zbl. 5, 24] und Hopf-Rinow [Comment. math. helv. 3, 209—225 (1931); dies. Zbl. 2, 350] verstanden. Die Krümmung K wird in indirekter Weise definiert, wie es unlängst H. Weyl in seiner Theorie der Röhren gemacht hat [Amer. J. Math. 61, 461—472 (1939); dies. Zbl. 21, 355]. ω_n bedeutet das Flächenmaß der Mannigfaltigkeit R_n , und N ist die Eulersche Zahl der Mannigfaltigkeit R_n . — Der Beweis dieses Hauptsatzes wird zunächst für den Spezialfall $q = 1$ geführt, und zwar mit Hilfe des Kroneckerschen Index. Der Beweis des allgemeinen Falles wird durch Hinzunahme der oben erwähnten Weylschen Theorie der Röhren erledigt, wobei zuerst der Fall eines ungeraden q behandelt wird, der Fall eines geraden q dagegen auf den ersten zurückgeführt wird. — Für ungerades n gilt bekanntlich nach dem Hopfschen Resultat die Formel (*) nicht mehr. St. Golqb (Krakau).

Epheser, Helmut: Eine moderne Darstellung der Gullstrandschen Arbeiten zur Strahlenoptik. Ann. Physik, V. F. 38, 501—541 (1940).

Verf. stellt sich die dankenswerte Aufgabe, die hauptsächlichsten Ergebnisse der inhaltsreichen und für viele Fragen der Strahlenoptik grundlegenden Untersuchungen Gullstrands [Die reelle optische Abbildung; Svenska Vetensk. akad. Hdl. 41 (1906) — Die optische Abbildung in heterogenen Medien und die Dioptrik der Kristalllinse des Menschen; dieselbe Z. 43 (1908)] mit den heutigen Hilfsmitteln der Differentialgeometrie und Variationsrechnung abzuleiten und sie hierdurch einem größeren Kreis zugänglich zu machen. Die räumlich-geometrischen Beziehungen, die den Arbeiten Gullstrands zugrunde liegen, treten bei der hier gegebenen Darstellungsweise besonders klar zutage. Der Betrachtungsstandpunkt ist überdies so allgemein gewählt, daß der Zusammenhang der Gullstrandschen Methode mit anderen Forschungen, insbesondere dem von Hamilton eingeschlagenen Weg, unmittelbar zu sehen ist. — Im Mittelpunkt der Ausführungen stehen die feldartigen Mannigfaltigkeiten von Lichtstrahlen in isotropen (homogenen und inhomogenen) Medien und ihre orthogonalen Trajektorien, die Wellenflächen. Es werden zunächst die differentialgeometrischen Eigenschaften einer solchen Mannigfaltigkeit studiert und die Änderungen angegeben, welche sie bei irgendeiner Brechung erleiden. Diese Beziehungen werden durch einen Zusammenhang zwischen der ersten und zweiten Grundform der brechenden Fläche und den entsprechenden Größen zweier Wellenflächen des einfallenden und des gebrochenen Systems hergestellt. Durch Verknüpfung zweier feldartiger Mannigfaltigkeiten mit gemeinsamem Grundstrahl werden die Gesetze erster Ordnung der optischen Abbildung gewonnen. Den Abschluß bildet Gullstrands Fundamentalgleichung und — für homogene Medien — die Charakterisierung der abbildbaren Linien einer gegebenen Objektfläche. H. Horninger (Berlin).

Mayer, O.: Sur les congruences de droites. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. 26, 613 bis 625 (1940).

Verf. entwickelt in vorliegender Arbeit für die Geradenkongruenzen eines projektiven Raumes beliebig hoher Dimension eine analoge Theorie, wie er sie kürzlich (dies. Zbl. 23, 70) für Regelflächen gegeben hat. Innerhalb der Geradenkongruenzen betrachtet Verf. die Flächenfamilien (Transversalfamilien) R derart, daß innerhalb eines gewissen Gebietes durch jeden Punkt der Kongruenz genau eine Fläche aus R geht und die Flächen aus R zwei beliebige Erzeugende in Punkten schneiden, die sich projektiv entsprechen. Sind $u = v = \text{const.}$ die Erzeugenden und $r = \text{const.}$ die Flächen einer Familie R , so wird die Kongruenz durch die Gleichung $x = a(u, v) + rb(u, v)$ dargestellt und jede Familie R durch

$$\frac{mr + n}{pr + q} = \text{const.},$$

worin a, b, m, n, p, q Funktionen von u und v sind, für die $mq - np \neq 0$ ist. Unter Anwendung der in der zitierten Arbeit erhaltenen Ergebnisse für Regelflächen bestimmt Verf. die Invarianten einer Familie R und eines Paares von Transversalfamilien sowie die zweier Familien R . Weiterhin untersucht Verf. diese Invarianten, indem er ihnen

eine geometrische Deutung beilegt, und löst einige auf sie bezügliche Probleme. In einer folgenden Note soll diese Theorie auf die Geradenkongruenzen des gewöhnlichen Raumes angewandt werden.

Mario Villa (Bologna).

Rosenfeld, B.: Théorie des congruences et des complexes de droites dans un espace elliptique. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 5, 105—123 u. franz. Zusammenfassung 123—126 (1941) [Russisch].

Es seien im dreidimensionalen elliptischen Raume R^3 zwei Geraden mit den extremalen Abständen ω_1, ω_2 gegeben. Nennt man ω , $\cos \omega = \cos \omega_1 \cdot \cos \omega_2$, den Abstand der Geraden, so zeigt man nach A. Norden, daß die so metrisierte Menge P^4 der Geraden des R^3 zu einer Hyperfläche F^4 2. Grades des elliptischen fünfdimensionalen Raumes isometrisch ist. Verf. untersucht die so erzielte Abbildung der Umgebungen einer Geraden und des entsprechenden Punktes auf der F^4 . — Eine Fortschreitungsrichtung zu einer Geraden im P^4 wird festgelegt durch den Parameter (Drall) p und durch die Koordinaten ϑ, θ des Striktions- (Kehl-) Punktes und der Striktionsebene. Der Richtung entspricht ein Einheitsvektor \mathbf{l} des die F^4 berührenden euklidischen Raumes in dem der Geraden zugeordneten Punkte. p, ϑ, θ werden durch die Komponenten von \mathbf{l} ausgedrückt. Die Normalkrümmung der F^4 in der betreffenden Richtung hängt allein von p ab. Soll die Fortschreitungsrichtung einem gegebenen Strahlensystem (Strahlenkomplex) angehören, so muß der Vektor \mathbf{l} durch einen (zwei) Winkel φ (φ, χ) in der Basis der Vektoren $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ ($\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$), die den stationären Werten von p entsprechen, darstellbar sein. Die Formeln, die p, ϑ, θ durch φ (φ, χ) und durch die Koordinaten der den \mathbf{f}_i entsprechenden Richtungen ausdrücken, werden angegeben; insbesondere hängt p allein von φ (φ, χ) und den p_i ab. — Am Schluß werden Anwendungen auf bestimmte Typen von Systemen und Komplexen gegeben. Dobbrack.

Dobbrack, Gerhard: Minimalkomplexe in der Kugel-Geometrie. S.-B. Berlin. math. Ges. 38/39, 72 (1940).

Inhaltsangabe der in dies. Zbl. 24, 181 besprochenen Arbeit. Harald Geppert.

Takasu, Tsurusaburo: Zur Theorie der Minimalkurven im konformen Raume. Tôhoku Math. J. 47, 129—158 (1940).

S. Sasaki und T. Suguri [Tôhoku Math. J. 47, 77—86 (1940); dies. Zbl. 24, 181] haben unter Verwendung der Cartanschen Methode der Strukturgleichung die natürliche Gleichung der Minimalkurven im konformen Raume behandelt. — Verf. behandelt in dieser Note dasselbe Problem auf einem anderen Wege und gewinnt das Resultat von Sasaki und Suguri wieder. Nach der Behauptung des Verf. kann man durch seine Methode den allgemeinen Fall sowie den Ausnahmefall durch denselben Gedanken einheitlich begründen.

T. Kubota.

Beck, H.: Kurvenkongruenzen und volumentreue Transformationen. Math. Z. 47, 275—290 (1941).

Verf. beweist den Satz: Jede analytische Kongruenz analytischer Kurven bleibt kurvenweise stehen bei einer unendlichen Gruppe gleichsinniger und gegensinniger, volumentreuer Transformationen. Bezeichnet man mit u, v die Parameter, die eine Kurve der Kongruenz festlegen, und mit w den Parameter, der einen Punkt der Kurve bestimmt, so erhält man die gesuchten Transformationen, die den Punkt x nach x' bringen, durch die Gleichungen

$$x = r(u, v, w); \quad x' = x(u, v, f(u, v, w)).$$

Die Transformation ist volumtreu, wenn

$$f_w |x_u x_v x_f| = \pm |x_u x_v x_w| \neq 0.$$

In dem Ausnahmefall $|x_u x_v x_w| \equiv 0$ liegen alle Kurven auf einer Fläche. Verf. zeigt, daß es stets eine unendliche Gruppe volumentreuer Transformationen gibt, die eine beliebige Fläche und damit auch die Kurvenkongruenz auf der Fläche punktweise stehenlassen. Dies geschieht durch eine systematische Untersuchung der Transformationen, die eine Geradenkongruenz stehenlassen. Zur Erläuterung diene folgendes

Beispiel: In einem Strahlensystem durchlaufe m die Mittelfläche, e sei der Einheitsvektor in Richtung der Geraden, die durch m geht; dann ist die Transformation, die den Punkt $x = m - we$ in den Punkt $x' = m + we$ überführt, involutorisch, gegenständig und volumtreu; sie läßt die Geraden der Kongruenz und die Mittelfläche m stehen. Da jede Fläche Mittelfläche von unendlich vielen Kongruenzen ist, ist ein Teil des Ausnahmefalls bewiesen.

W. Haack (Karlsruhe).

Garnier, René: *Extension de la formule de Savary au mouvement le plus général d'un solide.* Ann. École norm., III. s. 57, 113—200 (1940).

Die Formel von Euler und Savary gibt den Zusammenhang zwischen den Krümmungsmittelpunkten einer ebenen Kurve und ihrer Hüllbahn bei einer ebenen Bewegung. Beim Aufstieg in den dreidimensionalen Raum teilt sich die Aufgabe, die Krümmungsverhältnisse der durch Bewegung erzeugten Gebilde zu untersuchen, in zwei zunächst anscheinend getrennte Aufgaben. Diese beziehen sich erstens auf die einhüllenden Kurven C_1 solcher Kurven C , deren Lagen im ruhenden System Einhüllende besitzen; inbegriffen sind hier die Bahnkurven der Punkte des bewegten Systems. Zweitens auf die Hüllflächen S_1 der im bewegten System mitgeführten Flächen S ; hier sind die Flächen inbegriffen, die von einer bewegten Kurve erzeugt werden. — Die Aufgabe, die Krümmungsverhältnisse der durch eine räumliche Bewegung erzeugten Gebilde aus jenen der erzeugenden Gebilde und aus den Elementen der Bewegung zu bestimmen, ist insbesondere von G. Koenigs [Mém. Acad. Sci. Paris (2) 35, 1—215 (1914); J. de Math. (6) 8, 103—158 (1912)] und M. Disteli [Z. Math. Phys. 62, 261—309 (1914)] behandelt worden. Verf. löst sie neuerdings in einer die beiden oben genannten Teilaufgaben gleichzeitig umfassenden Weise. Er geht dabei von der Tatsache aus, daß die Beziehungen, welche bei einer räumlichen Bewegung einer Fläche S ihre Hüllfläche S_1 , einer Kurve die von ihr erzeugte Fläche, einem Punkt seine Bahnkurve zuordnen, sämtliche in einer wohlbestimmten Berührungstransformation enthalten sind. — Es sei $z = f(x, y)$ die Gleichung einer Fläche S , bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen Ursprung im Berührungspunkt von S, S_1 liegt, während seine z -Achse mit der Berührungsnormale g zusammenfällt. Aus der Theorie der Berührungstransformationen folgt dann, daß zwischen den durch $1:r:s:t:rt - s^2 = X:Y:Z:T:U$ definierten Größen X, \dots, U und den für S_1 entsprechend gebildeten Größen X_1, \dots, U_1 eine lineare Substitution besteht. Diese betrachtet Verf. als die Verallgemeinerung des Euler-Savaryschen Gesetzes für den Raum. Er bestimmt diese lineare Substitution auf zwei verschiedene Arten. Für Flächenpaare S, S_1 , die sich auf einer festen Normalen g berühren, bringt er die Substitution auf eine besonders einfache kanonische Form. Die Ausdehnung der Substitution auf den Fall, daß sich die Berührungsnormale g innerhalb des in einem Augenblick der Bewegung bestimmten linearen Gewindes verändert, wird in den verschiedenen Fällen behandelt, die nach der Art der Achsenflächen der Bewegung und der Lage von g gegenüber der Momentanachse möglich sind. Die Ergebnisse von Koenigs und Disteli lassen sich nach der Methode des Verf. wiedergewinnen und teilweise ergänzen.

Willh. Schmid.

Pinney, Edmund: *General geodesic coordinates in a general differential geometry.* Tôhoku Math. J. 47, 111—120 (1940).

Die Arbeit kann als Verallgemeinerung einer Arbeit von A. D. Michal [Geodesic coordinates of order r , Bull. Amer. Math. Soc. 36, 541—546 (1930)] angesehen werden. Ist zwischen einem topologischen Hausdorffschen Raum H und einem Banachschen Raum B ein Homöomorphismus der Umgebungen hergestellt, so kommt eine Arithmetisierung des Raumes H zustande, und man kann also in H eine analoge Geométrie treiben wie in einer X_n , da wir den Begriff des Koordinatensystems und der Koordinatentransformation haben. Mit Hilfe des Begriffes des Fréchetischen Differentials werden die kontravarianten Vektoren und der lineare Zusammenhang vom Rang r erklärt, und mittels des letzten definiert alsdann Verf. die geodätischen Koordinatensysteme vom Rang r . Auf die Definition eines kovarianten Vektors folgt die der ko-

varianten Ableitungen von Tensorfeldern. Bei dieser kovarianten Differentiation bleibt der Charakter des Tensorfeldes erhalten. *St. Golq̄b* (Krakau).

Kawaguchi, Akitsugu: Die Differentialgeometrie höherer Ordnung. 2. Über die n -dimensionalen metrischen Räume mit vom m -dimensionalen Flächenelement abhängigem Zusammenhang. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 9, 153—188 (1940).

Die Arbeit stellt eine Verbesserung einer früheren Theorie des Verf. dar [Mh. Math. Phys. 43, 289—297 (1936); dies. Zbl. 14, 332]. Die Verbesserung kommt dadurch zustande, daß eine der früheren Forderungen, die zur Festlegung der sog. Grundfunktion führten, jetzt fallen gelassen wird. Es wird ohne diese Forderung das kovariante Differential der gewöhnlichen und der u -Vektoren, sowie die sog. Grundübertragung definiert. Eine weitere Forderung gestattet es, die Übertragungsparameter eindeutig zu bestimmen. Ein spezieller Fall wird in näheren Betracht gezogen und eingehend studiert. Die Theorie der Untermannigfaltigkeiten soll in einer späteren Arbeit entwickelt werden. *St. Golq̄b* (Krakau).

Chazy, Jean: Sur la formule du double produit vectoriel. C. R. Acad. Sci., Paris 211, 449—450 (1940).

Noch ein Beweis der bekannten Formel der elementaren Vektorrechnung

$$(\alpha \times \beta) \times \gamma = (\alpha\gamma)\beta - (\beta\gamma)\alpha,$$

der auf die trigonometrische Formel $\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta \cdot \cos\alpha - \cos\beta \cdot \sin\alpha$ zurückgeführt wird. *St. Golq̄b* (Krakau).

Bloch, André: Sur les systèmes d'aires planes orientées dans l'espace. C. R. Acad. Sci., Paris 210, 728—729 (1940).

Verf. definiert in dem Größensystem, das aus den mit positiven Zahlen belegten orientierten Ebenen besteht, eine Addition und einen Momentbegriff in der Art der Vektorrechnung und führt ohne Beweise eine Reihe von Sätzen an, die von den Flächeninhalten krummer Flächenstücke, von den Rauminhalten kegelförmig begrenzter Raumstücke, sowie von einigen analytischen Beziehungen handeln, die sich bei Fragestellungen über Schwerpunkte ergeben. *E. Kruppa* (Wien).

Johnson, Marie M.: An extension of a covariant differentiation process. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 269—271 (1940).

H. V. Craig hat als erster Tensoren betrachtet, deren Komponenten nicht nur von den Koordinaten, sondern auch von ihren Ableitungen bis zur Ordnung m abhängen [Bull. Amer. Math. Soc. 37, 731—734 (1931); dies. Zbl. 3, 75]. Dort hat er auch den Begriff des Prozesses der kovarianten Differentiation eingeführt. Verf. versucht in etwas komplizierter Weise (die Rechnung ist nur in einem speziellen Falle $m = 3$ für den einfachsten Tensor der Valenz 1 durchgeführt und die allgemeine Formel ohne Rechnung angegeben) einen anderen Prozeß der kovarianten Differentiation zu definieren, der zu einem Tensor führt, dessen Valenz um Eins größer ist. Für $m = 2$ reduziert sich das Verfahren auf das von Craig angegebene. Die üblichen Regeln der Differentiation von Summen und Produkten der Tensoren bleiben erhalten. *St. Golq̄b*.

Michihiro, Satoshi: A remark to a covariant differentiation process. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 9, 189—192 (1940).

Es wird ein allgemeines Verfahren angedeutet, das die beiden von H. V. Craig [Bull. Amer. Math. Soc. 37, 731—734 (1931); dies. Zbl. 3, 75] und M. M. Johnson (siehe vorstehend besprochene Arbeit) angegebenen Prozesse der kovarianten Differentiation von Tensoren, deren Komponenten nicht nur von den Koordinaten, sondern auch von ihren Ableitungen bis zur Ordnung m abhängen, als Spezialfälle in sich enthält. Das Verfahren stützt sich auf den von A. Kawaguchi [Proc. Imp. Acad. Jap. 12, 149—151 (1936); dies. Zbl. 15, 275] eingeführten Begriff der kovarianten Differentiation längs einer Kurve und in bezug auf ein gegebenes Vektorfeld. Hiermit wird das Resultat von Johnson viel einfacher gewonnen. *St. Golq̄b* (Krakau).

Integralgeometrie. Konvexe Gebilde:

Chern, Shiing-shen: Sur une généralisation d'une formule de Crofton. C. R. Acad. Sci., Paris **210**, 757—758 (1940).

Nach Crofton gilt für die „Anzahl“ der Geraden der Ebene, die einen Kurvenbogen dieser Ebene treffen, eine Formel der Gestalt $nG = c \cdot s$, wo c eine Konstante ist und s die Länge des Bogens darstellt. Verf. erweitert diesen Satz auf eine beliebige transitive Gruppe G im R_n , wobei an Stelle der Geraden die Bilder bei G eines geeigneten Teilraumes treten. Die Gesamtheit dieser Bilder soll bei G endliches Maß besitzen. Bei geeigneter Definition der Schnittpunktzahl gilt eine der Croftonschen entsprechende Formel, wobei s ersetzt wird durch die Picksche Invariante der Kurve bei der Gruppe G . Bol (Greifswald).

Hadwiger, H.: Überdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate. Comment. math. helv. **13**, 195—200 (1941).

Ist G_\square ein Mittelpunktschsechseck mit Oberfläche F_\square und Umfang L_\square , so läßt sich die Ebene pflastern mit kongruenten Sechsecken, die aus G_\square durch die Abbildungen einer Gittergruppe hervorgehen. Ist G ein beliebiger Bereich vom Flächeninhalt F und Umfang L , so läßt sich G mit $\left[\frac{L_\square L + 2\pi(F + F_\square)}{2\pi F_\square} \right]$ der Sechsecke überdecken.

Mit derselben Anzahl von Bildern einer G umbeschriebenen konvexen Figur G_0 bei der Gittergruppe kann G überdeckt werden. Anwendung: Für G_0 wird ein Einheitsquadrat oder Einheitskreis gewählt. — Sind G und G_0 zwei beliebige Bereiche und läßt sich weder G von G_0 , noch G_0 von G überdecken, so ist $LL_0 - 2\pi(F + F_0) \geq 0$. Hieraus folgen 1. die isoperimetrische Ungleichung und 2. hinreichende Bedingungen für λ , damit λG den Bereich G_0 überdecken bzw. von ihm überdeckt werden kann. — Zum Beweis werden früher (Comment. math. helv. **11**, 221—233; dies. Zbl. **20**, 262) vom Verf. bewiesene Mittelwertsätze verwendet. Andeutung entsprechender Ergebnisse im Raum. Bol (Greifswald).

Dinghas, Alexander: Über eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung in der Ebene. S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa **149**, 117—132 (1940).

Verf. beweist zuerst eine Verallgemeinerung des Wirtingerschen Lemmas. $y(\varphi)$ sei eine periodische Funktion der Periode 2π mit stückweise stetiger m -ter Ableitung, für die $\int_0^{2\pi} y(\varphi) d\varphi = 0$ ist. Bezeichnen $S_0 = 1$, $S_1 = \sum_{\nu=1}^n \nu^2$, S_2, \dots, S_n die elementarsymmetrischen Funktionen der Zahlen $1^2, 2^2, \dots, n^2$, so gilt dann für jedes $n \leq m$ die Ungleichung

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} \{y^{(n)} - S_1 y^{(n-1)} + S_2 y^{(n-2)} - \dots + (-1)^n S_n y^2\} d\varphi \geq 0,$$

in der das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn y ein Fourierpolynom n -ten Grades $\sum_{\nu=1}^n (a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi)$ ist. Bezeichnen $k_0, -k_1, k_2, \dots, (-1)^{n-1} k_{n-1}$ analog die elementarsymmetrischen Funktionen der Zahlen $2^2, 3^2, \dots, n^2$, und setzt man

$$A_\nu = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{y^{(\nu+1)} - y^{(\nu)}\} d\varphi,$$

so kann man weiter für $n+1 \leq m$ die Doppelungleichung

$$(2) \quad 0 \leq \sum_{\nu=0}^n k_\nu A_{n-\nu-1} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{\nu=0}^{n-1} k_\nu A_{n-\nu}$$

ableiten, in der rechts bzw. links die Gleichheit für ein Fourierpolynom $n+1$ -ten bzw. n -ten Grades eintritt. — Ist nun C eine ebene konvexe Kurve der Länge L mit

der Stützfunktion $p(\varphi)$, und setzt man $y = p - \frac{L}{2\pi}$ oben ein, so erhält man aus (2) Verschärfungen der isoperimetrischen Ungleichung; es wird dann $A_0 = \frac{L^2}{4\pi} - F$, A_ν der Flächeninhalt der ν -ten Evolute von C , und man erhält z. B. für $n = 1$ die bekannte Hurwitzsche Ungleichung $0 \leq \frac{L^2}{4\pi} - F \leq \frac{1}{4} A_1$. Versteht man unter $(-1)^\nu \bar{k}_\nu(q)$ die ν -te elementarsymmetrische Funktion der Zahlen $\frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{q^2}$, so kann man diese Verschärfungen in die Form setzen:

$$(-1)^n \sum_{\nu=1}^{n-1} \bar{k}_\nu(n) A_\nu \leq (-1)^{n-1} A_0 \leq (-1)^n \sum_{\nu=1}^n \bar{k}_\nu(n+1) A_\nu,$$

worin die Gleichheit links bzw. rechts steht, wenn y ein Fourierpolynom n -ten bzw. $n+1$ -ten Grades ist. — Methode und Ergebnis lassen sich auf den n -dimensionalen Raum übertragen. Ist $u(x_1, \dots, x_m)$ eine auf der Sphäre $S_m: \sum_{i=1}^m x_i^2 = 1$ samt den Ableitungen der $2N$ -ten Ordnung stetig ableitbare Funktion, für die $\int_{S_m} u d\omega_m = 0$ ($d\omega_m =$ Flächenelement von S_m) ist, so ist für $n \leq N$:

$$(3) (-1)^n \sum_{\nu=0}^n C_\nu \int_{S_m} u \Delta_{n-\nu} u d\omega_m \geq 0, \text{ mit } C_\nu = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \binom{n-\nu+\lambda}{\lambda} S_{\nu-\lambda} (\nu-\lambda)^\lambda (m-2)^\lambda,$$

wobei Δ_k die k -te Iteration des Beltramischen Differentiators bezeichnet. Für $n = 1$ schließt (3) nach Anwendung des Greenschen Satzes die Ungleichung von Blaschke-Wirtinger ein. — Wichtige Druckfehler: S. 128, 5. Z. v. u. $-\nu(m-2)$ statt $-(m-2)$; S. 129, 4. Z. v. o. $q - \alpha\nu$ statt $q - \nu$; 6. Z. v. o. $(k-\lambda)^\lambda$ statt ν^λ . Harald Geppert.

Dinghas, Alexander: Neuer Beweis eines Satzes von Wirtinger und Blaschke. Math. Z. 47, 265—274 (1941).

Der zu beweisende Satz besagt: Auf der Einheitskugel $\mathfrak{S}_n, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$, mit dem Flächenelement $d\omega_n$ sei $u(x_1, \dots, x_n)$ eine eindeutige, stetig differenzierbare Funktion, für die $\int_{\mathfrak{S}_n} u d\omega_n = 0$ gilt. Dann ist ($V_n =$ erster Beltramischer Differentiator)

$$J_n = \int_{\mathfrak{S}_n} [(n-1)u^2 - V_n u] d\omega_n \leq 0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für $u = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ mit willkürlichen Konstanten c_i .

Der Beweis wird durch Induktion bezüglich n und ohne die bisher übliche Benutzung von Kugelfunktionen erbracht. Stellt man \mathfrak{S}_{k+1} in Parameterform dar:

$$x_\nu = \prod_{\mu=\nu}^k \sin \vartheta_\mu \cos \vartheta_{\nu-1}, \quad (\nu = 1 \dots k+1; \vartheta_0 = 0),$$

so ist für $k \geq 2$ zu definieren $V_{k+1} = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_k^2} + \sin^{-2} \vartheta_k \cdot V_k$. Setzt man dann

$$\bar{u} = \frac{1}{\omega_k} \int_{\mathfrak{S}_k} u d\omega_k, \quad u - \bar{u} = v, \quad A_{k+1} = \int_{\mathfrak{S}_{k+1}} u d\omega_{k+1},$$

$$U = u - A_{k+1}, \quad \bar{U} = \bar{u} - A_{k+1},$$

drückt alles in $\vartheta_1 \dots \vartheta_k$ aus und bezeichnet $\bar{U} \left(\frac{\pi}{2} \right) = d_k$, $\bar{U} - d_k = \bar{U}^*$, so lautet die Rücklaufformel für J_{k+1} :

$$J_{k+1}(U) = -k \omega_{k+1} \bar{d}_k^2 - \int_{\mathfrak{S}_{k+1}} \{ \bar{U}_k^* + \bar{U}^* \tan \vartheta_k \}^2 d\omega_{k+1} -$$

$$- \int_{\mathfrak{S}_{k+1}} (v \vartheta_k - v \cot \vartheta_k)^2 d\omega_{k+1} + \int_0^\pi J_k(v) \sin^{k-3} \vartheta_k d\vartheta_k,$$

aus der (1) und die Extremalfunktion im Falle des Gleichheitszeichens erschlossen wird. — Eine Anwendung macht Verf. auf die Quermaßintegrale W_i ($i = 1 \dots n$) eines konvexen Körpers im R_n , indem er die Minkowskische Ungleichung $V_{12}^2 \geq V_{11} V_{22}$ und eine früher bewiesene Ungleichung (dies. Zbl. 22, 83) behandelt. Harald Geppert.

Alexandrov, A.: An application of the theorem on the invariance of domains to existence proofs. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 3, 243—255 u. engl. Zusammenfassung 256 (1939) [Russisch].

Mit Hilfe des Satzes von der Gebietsinvarianz bei beliebiger topologischer Abbildung stellt Verf. leicht den folgenden Satz auf: Es seien A und B zwei gleichdimensionale Mannigfaltigkeiten, B dabei zusammenhängend. A sei eineindeutig und stetig auf eine Teilmenge B' von B abgebildet derart, daß, falls die Elemente b_n von B Bilder der Elemente a_n von A sind und b_n gegen b konvergiert, auch a_n gegen ein Element a konvergiert, welches das Original von b ist. Dann ist B' identisch mit B . Diesen Satz wendet Verf. auf Existenzsätze vom folgenden Typus an: Für jedes a existiert ein b , für jedes b existiert ein a . — Im § 2 wird als Beispiel der Fundamentalsatz der Algebra von der Wurzelexistenz behandelt. Jedem System von n verschiedenen komplexen Zahlen entspricht nämlich genau ein Polynom, das die Zahlen zu einfachen Wurzeln hat, und umgekehrt entspricht jedem Polynom n -ten Grades ohne mehrfache Wurzeln höchstens ein solches System von Zahlen. — Im § 3 wird der bekannte Minkowskische Satz von der Existenz eines konvexen Körpers mit vorgegebener Stützfunktion bewiesen; man wendet das aufgestellte Prinzip zunächst auf konvexe Vielfläche an und benutzt darauf einen Grenzübergang. — Im § 4 beweist man nach demselben Verfahren den Minkowskischen Satz von der Existenz eines konvexen Körpers mit vorgegebenen äußeren Normalen und Flächeninhalten der Randvierecke; daraus läßt sich die Existenz eines konvexen Körpers mit vorgegebener Oberflächenfunktion ableiten [für den letzten Begriff s. die Arbeit des Verf., Rec. math. Moscou 44, 947—972 (1937); dies. Zbl. 17, 426]. — Im § 5 wird ein zum Satze im § 4 dualer Satz aufgestellt: Es mögen die Ecken eines konvexen Vielflachs auf den vom Koordinatenanfangspunkt ausgehenden Strahlen $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ liegen, die nicht in einem Halbraum verlaufen. Falls $C_{k_1 k_2 \dots k_m}$ die Größe des zur konvexen Hülle von m beliebigen Strahlen $\bar{r}_{k_1}, \bar{r}_{k_2}, \dots, \bar{r}_{k_m}$ polaren Winkels bedeutet und unter K_i die Größe des Körperwinkels verstanden wird, der zum Körperwinkel in irgendeiner Ecke des Vielflachs polar ist, so hat man die Ungleichungen $\sum K_i > C_{k_1 k_2 \dots k_m} (1)$; die Summe wird über alle Ecken erstreckt, die außerhalb der konvexen Hülle der Strahlen $\bar{r}_{k_1}, \bar{r}_{k_2}, \dots, \bar{r}_{k_m}$ liegen. Umgekehrt: bei vorgegebenen Strahlen $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ und n positiven Zahlen K_i mit der Summe 4π , die den Ungleichungen (1) genügen, läßt sich eindeutig (bis auf Ähnlichkeiten) ein konvexes Vielflach bestimmen, das den erwähnten Bedingungen genügt. — Im § 6 werden einige der Betrachtungen des § 5 auf beliebige konvexe Körper ausgedehnt. Es sei Σ die Oberfläche der Einheitskugel um O , H der Rand eines O im Innern enthaltenden konvexen Körpers. Jedem Punkte von Σ entspricht auf H seine Projektion aus O (Abb. 1); dem zweiten Punkte entspricht wiederum auf Σ sein Gaußsches Bild (Abb. 2). Durch das Produkt dieser beiden Abbildungen ist jeder Menge σ auf Σ eine neue Menge $\omega(\sigma)$ auf Σ zugeordnet, deren Flächeninhalt $K(\sigma)$ als Integralkrümmung der Menge τ auf H bezeichnet wird, die σ vermöge Abb. 1 entspricht. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt, damit eine für die Mengen σ auf Σ erklärte Mengenfunktion $K(\sigma)$ die Integralkrümmung eines konvexen Körpers darstellt, der O im Innern enthält. Daß $K(\sigma)$ den Körper bis auf Ähnlichkeiten eindeutig bestimmt, hat Verf. nicht beweisen können. *B. Petkantschin (Sofia).*

Alexandroff, A.: Existence of a given polyhedron and of a convex surface with a given metric. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 30, 103—106 (1941).

Beweis des Satzes von H. Weyl: Jede Riemannsche Metrik nicht negativer Krümmung auf der Kugeloberfläche läßt sich realisieren auf einer konvexen, geschlossenen Fläche des Euklidischen R_3 . — Verf. definiert eine „Metrisierung“ eines aus Dreiecken zusammengesetzten Komplexes vom topologischen Zusammenhang der Kugelfläche, indem er jeder Kante eine Länge beilegt, so, daß für die Seiten jedes Dreiecks die Dreiecksungleichungen gelten. Indem man sich das einzelne Dreieck mit den beigegebenen Kantenlängen Euklidisch realisiert denkt, werden Winkel der Komplexdreiecke definiert;

ist die Summe der an jeder Ecke des Komplexes zusammenstoßenden Winkel $\leq 2\pi$, so heißt der Komplex konvex metrisiert. Verf. beweist, daß sich jeder konvex metrisierte Komplex vom Zusammenhang der Kugelfläche durch eine Polyederfläche im R_3 Euklidisch realisieren läßt (und zwar nach einem Satze von Cauchy bis auf Bewegungen eindeutig). Beweis: Im $3n - 6$ -dimensionalen Raum, dessen Koordinaten die Kantenlängen eines Komplexes sind, bilden die konvexen Metrisierungen eine abgeschlossene Teilmenge M . Die realisierbaren Metrisierungen bilden eine Untermenge von M , die Punkte jeder zusammenhängenden Komponente von M enthält und in M sowohl offen wie abgeschlossen sein muß, also mit M identisch ist. — Der Weylsche Satz wird jetzt bewiesen, indem auf die Kugel eine Folge von Triangulierungen aus Geodätischen bei der vorgegebenen Metrik gelegt wird, deren Kantenlängen nach Null streben. Die Metrisierung dieser Triangulierungen wird der vorgegebenen Metrik entnommen und ist dann, wie leicht ersichtlich, konvex. Aus der Folge der realisierenden Polyeder läßt sich nach dem Auswahlssatz eine konvergente Teilfolge auswählen; die Grenzfläche realisiert die vorgegebene Metrik auf der Kugel. Entsprechend läßt sich jede nicht negativ gekrümmte Riemannsche Metrik der Ebene, die diese zu einem „vollständigen“ Riemannschen Raum macht, durch eine (offene) konvexe Fläche im R_3 realisieren.

Bol (Greifswald).

Topologie:

Merz, K.: Kreuzhaube aus verschiedenen Netzen. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 85, 51—57 (1940).

Ausgehend vom Netz einer einem quadratischen Prisma aufgesetzten quadratischen Pyramide erhält man das Netz der Kreuzhaube. Je nachdem wie man die Kanten auswählt, an denen die Oberseite des Netzes mit der Unterseite aneinander stoßen soll (Wendestrecken), die zusammen einen geschlossenen Kantenzug ergeben müssen, kann das Netz auf sieben verschiedene Arten zur Kreuzhaube zusammengefügt werden.

Künneht (Erlangen).

Hudekoff, N.: Über die allgemeine Lage von $n + 2$ Punkten in R^n . Rec. math. Moscou, N. s. 9, 249—275 u. dtsh. Zusammenfassung 275—276 (1941) [Russisch].

Es mögen $n + 2$ Punkte in allgemeiner Lage im euklidischen n -dimensionalen Raum gegeben sein. Diese Punkte werden folgendermaßen auf zwei Klassen verteilt: Man wählt einen von ihnen aus, der etwa mit A_1 bezeichnet werden möge; ist dann X ein anderer von den Punkten, so wird er mit A_1 in die gleiche Klasse getan, wenn A_1 und X durch die von den übrigen n Punkten bestimmte $(n - 1)$ -dimensionale Ebene getrennt werden; wenn dies nicht der Fall ist, so kommt X in die andere Klasse. So entstehen die beiden nicht-leeren Klassen

$$(*) \quad \{A_1, A_2, \dots, A_m\}, \quad \{B_1, B_2, \dots, B_{n+2-m}\}.$$

Je zwei Elemente derselben Klasse werden durch die von den übrigen n Punkten bestimmte Ebene getrennt, je zwei Elemente aus verschiedenen Klassen nicht. — Um zu einer Aussage über topologische Invarianz zu kommen, betrachtet der Verf. die Figur aus den $n + 2$ Punkten und allen von ihnen aufgespannten k -dimensionalen Simplexes ($k = 1, 2, \dots, n$). Durch eine Homöomorphie geht dieses „vollständige simpliziale $(n + 2)$ -Eck“ mit dem Zahlenpaar $m, n + 2 - m$ wieder in ein $(n + 2)$ -Eck mit dem gleichen Zahlenpaar über; und je zwei $(n + 2)$ -Ecke mit gleichen Zahlenpaaren sind homöomorph. — Geometrisch bedeutet die Aufteilung (*), daß die Simplexes (A_1, A_2, \dots, A_m) und $(B_1, B_2, \dots, B_{n+2-m})$ einen Punkt gemein haben [oder, wie man auch sagen kann, daß der Rand des Simplex (A_1, A_2, \dots, A_m) mit der durch die $B_1, B_2, \dots, B_{n+2-m}$ bestimmten $(n + 1 - m)$ -dimensionalen Ebene verschlungen ist]. Im Fall $n = 1$ besagt die Einteilung $\{A_1, A_2\}, \{B_1\}$, daß B_1 zwischen A_1 und A_2 liegt, und entsprechend beschreibt (*) für $n > 1$ die Anordnung der $n + 2$ Punkte. (Nach dem Résumé referiert.)

Bachmann.

Stiefel, Eduard: Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra. *Comment. math. helv.* 13, 201—218 (1941).

Die vom Autor früher (dies. Zbl. 14, 416) entwickelte Theorie der Richtungsfelder in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten wird speziell auf den Fall des projektiven Raumes P^n angewandt. Es zeigt sich, daß die damals eingeführte „charakteristische Homologiekategorie“ $F^{m-1} \pmod{2}$ gegeben ist durch die Nullklasse oder durch den Zykklus P^{m-1} , je nachdem ob der Binomialkoeffizient $\binom{n+1}{m}$ gerade oder ungerade ist. Das bedeutet: Wenn $\binom{n+1}{m}$ ungerade ist, und wenn ein stetiges m -Feld in $P^n - Q$ gegeben ist, wobei Q ein Teilkomplex von P^n oder eine offene Menge in P^n ist, so enthält Q einen zum Teilraum P^{m-1} homologen Zyklus. (Ein m -Feld besteht aus m in jedem Punkt linear unabhängigen Richtungsfeldern.) Es folgt: Wenn der Regularitätsbereich des m -Feldes einen Teilraum P^k enthält, so müssen alle Binomialkoeffizienten $\binom{n+1}{\mu}$ mit $n-k < \mu < m+1$ gerade sein. Der Spezialfall $n=k$ ergibt: Es sei $n+1 = 2^\lambda u$ und u ungerade. Dann ist es unmöglich, ein im ganzen P^n reguläres 2^λ -Feld anzubringen. Folgerung: Wenn eine s -gliedrige lineare Schar von n -reihigen, r -spaltigen reellen Matrizen vom Rang r existiert, so müssen alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\mu}$ mit $n-r < \mu < s$ gerade sein. Oder: Wenn n bilineare Gleichungen in x_1, \dots, x_r und y_1, \dots, y_s im Reellen nur triviale Lösungen haben, so sind alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\mu}$ mit $n-r < \mu < s$ gerade. *van der Waerden* (Leipzig).

Hopf, Heinz: Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra. *Comment. math. helv.* 13, 219—239 (1941).

Eine reelle Funktion $f(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s)$, die erklärt und stetig ist für $\sum x_e^2 = \sum y_e^2 = 1$, heiße ungerade, wenn sie sowohl bei Ersetzung der x_e durch $-x_e$, als auch bei der Ersetzung der y_e durch $-y_e$ ihr Vorzeichen wechselt. Ein System von n solchen Funktionen f_1, \dots, f_n heiße definit, wenn das Gleichungssystem $f_1 = 0, \dots, f_n = 0$ im angegebenen Bereich unlösbar ist. Hauptsatz: Wenn es ein solches definites System gibt, so sind alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit $n-r < k < s$ gerade. Für Bilinearformen wurde der Hauptsatz von E. Stiefel (s. vorstehendes Referat) bewiesen, für beliebige Formen ungeraden Grades von F. Behrend (dies. Zbl. 21, 293). Aus dem Hauptsatz folgt direkt $n \geq r$ und $n \geq s$. Ist speziell $r = s > 2^{e-1}$, so folgt weiter $n \geq 2^e$. Ist $n = s = 2^\lambda u$ (u ungerade), so folgt $r \leq 2^e$. Weiter werden Sätze von Hurwitz und Radon über die Komposition von quadratischen Formen sowie Sätze über Matrizen aus ungeraden Funktionen aus dem Hauptsatz hergeleitet. Der Beweis des Hauptsatzes wird topologisch geführt. Ein definites System definiert nämlich eine stetige Abbildung des topologischen Produktes $S_{r-1} \times S_{s-1}$ in die Sphäre S_{n-1} . Durch Identifizierung gegenüberliegender Punkte entsteht aus S_{n-1} der projektive Raum P_{n-1} . Zu einer Abbildung von $P_{r-1} \times P_{s-1}$ in P_{n-1} gehört nun ein Umkehrhomomorphismus der Homologieringe (vgl. dies. Zbl. 18, 90), mit dessen Hilfe der Beweis geführt wird. *van der Waerden* (Leipzig).

Bockstein, M.: Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe. *Rec. math. Moscou, N. s.* 9, 365—376 (1941).

Es wird gezeigt: Die ganzzahligen Homologiegruppen eines Komplexes lassen sich durch die Ordnungen der Homologiegruppen modulo m ($m = 2, 3, \dots$) bestimmen. Dieser Satz wird dann auf die Bestimmung der Homologiegruppen \mathfrak{H}^d einer Vereinigung zweier Komplexe K, L angewendet. Besitzen K und L den Durchschnitt D , so sind die \mathfrak{H}^d durch die Homologiegruppen von K und L und die D entsprechenden Untergruppen derselben bestimmt.

K. Reidemeister (Marburg a. d. L.).

Pontrjagin, L.: Products in complexes. Rec. math. Moscou, N. s. 9, 321—328 (1941).

Im Anschluß an Alexander und Kolmogoroff werden ∇ -Komplexe und ∇ -Homologiegruppen erklärt, mittels Funktionen, welche jedem algebraischen Komplex eine ganze Zahl zuordnen, und einer Berandungsbeziehung für solche Funktionen. Bettet man einen Simplicialkomplex K als Polyeder in einen R^n ein, so besteht eine eindeutige Beziehung zwischen den Homologieklassen von $R^n - K$ und den ∇ -Homologieklassen von K . Mit Hilfe des Durchschnitts für die Ketten in $R^n - K$ läßt sich nun ein Produkt für ∇ -Komplexe erklären, das bis auf ∇ -Homologien von der Einbettung unabhängig ist. Ähnliche Konstruktionen sind auf Grund der Dualität in Mannigfaltigkeiten möglich. Jede Homologieklass X, Y, \dots entspricht eine ∇ -Homologieklass $X' Y'$ und dem Durchschnitt XY das Produkt $X' Y' = (XY)'$.

K. Reidemeister (Marburg a. d. L.).

Hirsch, Guy: Topologie. Détermination d'un nombre minimum de points fixes pour certaines représentations. Bull. Sci. math., II. s. 64, 45—55 (1940).

Es sei \mathcal{C} ein n -dimensionaler Komplex, welcher eine zweifache Überlagerung besitzt, die dieselben Bettischen Zahlen wie eine Sphäre hat. Eine Abbildung von \mathcal{C} in sich hat dann mindestens zwei Fixpunkte, wenn der lokale Grad derselben ungleich ± 1 ist.

K. Reidemeister (Marburg).

Robbins, Herbert: On the classification of the mappings of a 2-complex. Trans. Amer. Math. Soc. 49, 308—324 (1941).

Es wird untersucht, welches die notwendigen und hinreichenden Voraussetzungen für die Homotopie von zwei Abbildungen eines 2-dimensionalen Simplicialkomplexes K^2 in einen (höher dimensional) Komplex T sind. Jede Abbildung läßt sich zunächst in eine solche f deformieren, bei der alle Punkte x_i von K^2 in einen festen Punkt y von T übergehen. Alsdann entspricht jeder Strecke $x_1 x_2$ von K^2 eine geschlossene Kurve $f(x_1 x_2)$ in T und damit ein Element γ_{12} der Fundamentalgruppe von T . Zwei Abbildungen, f_1 und f_2 , bei denen $f_1(x_i x_k)$ zu $f_2(x_i x_k)$ homotop sind, lassen sich so deformieren, daß sie auf K^1 , dem eindimensionalen Teilkomplex von K^2 , identisch sind. Sind f'_1, f'_2 schließlich zwei auf K^1 identische Abbildungen, so ist für jedes Dreieck $x_i x_k x_l$ aus K^2 $f'_1(x_i x_k x_l) + f'_2(x_i x_k x_l) = d_{12}(x_i x_k x_l)$ ein Element aus der zweiten Homotopiegruppe von T . Das sind die Tatsachen, aus denen die notwendigen und hinreichenden Homotopiebedingungen sich unschwer ergeben.

K. Reidemeister.

Kerékjártó, B. de: Sur les groupes compacts de transformations topologiques de la sphère. Mat. természett. Értes. 59, 805—827 u. franz. Zusammenfassung 828 (1940) [Ungarisch].

In einem Budapester Gastvortrag hat De Rham eine Vermutung bezüglich der kompakten Gruppen von topologischen Selbstabbildungen der n -dimensionalen Kugel ausgesprochen. Verf. beweist diese Vermutung für $n = 2$. Der betreffende Satz lautet dann: Eine auf der Kugeloberfläche transitive, kompakte Gruppe von topologischen Selbstabbildungen der Kugeloberfläche, bei welchen die Indikatrix erhalten bleibt, ist mit der Gruppe der Drehungen der Kugel homöomorph.

G. Alexits (Budapest).

Harrold jr., O. G.: Continua of finite degree and certain product sets. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 951—953 (1940).

Verf. gibt zwei neue Charakterisierungen der Kontinuen K endlichen Grades, d. h. der K , welche in jedem Punkt endlichen Grad haben [H. Kamiya, Tôhoku Math. J. 36, 58—72 (1932); dies. Zbl. 5, 183]: 1. K ist lokal zusammenhängend, und zu jedem Paar abgeschlossener, fremder Teilmengen A und B von K existieren endlich viele fremde, perfekte Mengen H_1, \dots, H_k derart, daß jedes zu A und B nicht fremde Teilkontinuum von K mindestens eine der Mengen H_i enthält. 2. Sind L und L_1, L_2, \dots nichtausgeartete Teilkontinuen von K mit $L = \lim L_i$, so existiert ein n , so daß der Durchschnitt $L_n \cdot L_{n+1} \cdot \dots$ un abzählbar ist.

Nöbeling (Erlangen).

Youngs, J. W. T.: K-cyclic elements. Amer. J. Math. 62, 449—456 (1940).

Eine neue Verallgemeinerung der zyklischen Elemente [vgl. das Referat zu: D. W.

Hall, Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 305—321 (1940); dies. Zbl. **24**, 286]. Es sei C ein zyklisches Kontinuum, k eine natürliche Zahl. Ein Punkt a von C heißt k -konjugiert zu einem Punkt b von C (in Zeichen $ak \sim b$), wenn gilt: für je k Punkte $x_1, \dots, x_k \neq a, b$ von C ist die a enthaltende Komponente S_a von $C - (x_1 + \dots + x_k)$ mit der b enthaltenden Komponente S_b identisch. Sind a_0, \dots, a_k paarweise k -konjugiert, so heißt die Menge $C(a_0, \dots, a_k)$ aller zu jedem Punkt a_0, \dots, a_k k -konjugierten Punkte von C ein k -zyklisches Element. Es besteht evtl. nur aus a_0, \dots, a_k . U. a. wird bewiesen: Für je $k+1$ Punkte b_0, \dots, b_k von $C(a_0, \dots, a_k)$ ist $C(a_0, \dots, a_k) = C(b_0, \dots, b_k)$. Jedes k -zyklische Element ist abgeschlossen. Es gibt höchstens abzählbar viele. Nun sei $k=2$ (statt 2-zyklisch sagt Verf. bizeyklisch), C_0 ein festes bizeyklisches Element, S eine Komponente von $C - C_0$. Die Begrenzung von S enthält genau 2 Punkte p, q ; dieselben zerlegen zusammen C ; \bar{S} enthält höchstens ein bizeyklisches Element $\supset (p+q)$; jedes bizeyklische Element ist entweder $\subset \bar{S}$ oder fremd zu S ; die Durchmesser aller S konvergieren gegen 0. Es folgen noch zwei Sätze über Konvergenzkontinuen.

Nöbeling (Erlangen).

Whyburn, G. T.: A relation between non-alternating and interior transformations. Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 320—321 (1940).

Es sei K ein (kompaktes) Kontinuum. Ist f eine nichtalternierende Abbildung von K und p ein Endpunkt (Punkt der Ordnung 1 im Sinne von Menger-Urysohn) von $f(K)$, so ist $f^{-1}(p)$ zusammenhängend. Ist f eine innere Abbildung, $f(K) = D$ ein Baum und $f^{-1}(p)$ zusammenhängend für jeden Endpunkt p von D , so ist f nichtalternierend. Es sei D ein Baum und H die Menge der Endpunkte von D ; ist dann f eine innere Abbildung von K auf D , so daß die Menge $f^{-1}(H)$ halb abgeschlossen ist, so ist $f = f_2 f_1$, wobei f_1 mit f auf $f^{-1}(H)$ äquivalent und auf $K - f^{-1}(H)$ topologisch und f_2 eine innere und nichtalternierende Abbildung ist. Zu den Definitionen vgl. G. T. Whyburn, Duke math. J. **2**, 685—690 (1936); dies. Zbl. **15**, 395, und Ann. of Math., II. s. **40**, 914—921 (1939); dies. Zbl. **24**, 86.

Nöbeling (Erlangen).

Wallace, A. D.: On 0-regular transformations. Amer. J. Math. **62**, 277—284 (1940).

Eine Mengenkonvergenz $M_n \rightarrow M$ heißt nach G. T. Whyburn [Fundam. Math. **25**, 408—426 (1935); dies. Zbl. **12**, 250] 0-regulär, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ zwei positive Zahlen δ und N existieren derart, daß für $n > N$ je zwei Punkte x und y von M_n mit einem Abstand $\varrho(x, y) < \delta$ in einem Kontinuum $\subset M_n$ mit einem Durchmesser $< \varepsilon$ enthalten sind. Verf. nennt eine Abbildung $f(A) = B$ 0-regulär, wenn für jede konvergente Punktfolge $y_n \rightarrow y$ in B folgt, daß die Urbilder $f^{-1}(y_n)$ 0-regulär gegen $f^{-1}(y)$ konvergieren. Verf. beweist die Möglichkeit einer Faktorzerlegung einer 0-regulären Abbildung in zwei ebensolche, von denen die eine monoton ist (jeder Bildpunkt hat ein zusammenhängendes Urbild), die zweite eine konstante Multiplizität hat. 0-reguläre Konvergenz bleibt erhalten bei der inversen Abbildung zu einer 0-regulären Abbildung. Zerschneidungspunkte (cut points), Endpunkte und A -Mengen lokal zusammenhängender Kontinuen werden auf ebensolche abgebildet. Eine 0-reguläre Abbildung eines Baumes ist topologisch; ist das Bild ein Baum, so ist die 0-reguläre Abbildung monoton.

Nöbeling (Erlangen).

Monteiro, António: Les ensembles fermés et les fondements de la topologie. Portugaliae Math. **2**, 56—66 (1941).

Verf. zeigt: 1. Es gibt Räume (V) im Sinne von Fréchet (Les espaces abstraits, Paris 1928), deren Topologie nicht durch die abgeschlossenen Mengen des Raumes bestimmt ist. 2. Die allgemeinsten Räume (V) , deren Topologie durch die abgeschlossenen Mengen des Raumes eindeutig bestimmt ist, sind die Räume (F) . 3. Die Räume (F) sind die Räume (V) , in welchen $\bar{A} = \bar{A}$ gilt. — Hierbei kann man einen Raum (F) definieren als Menge, deren Teilmengen A erstens je eine andere Teilmenge \bar{A} zugeordnet ist, so daß gilt: 1. für die leere Menge 0 ist $\bar{0} = 0$; 2. $\bar{A} \supset A$; 3. $A + B \subset \bar{A} + \bar{B}$;

4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; und zweitens als Ableitung A' die Menge aller Punkte p , die in $\overline{A - (p)}$ enthalten sind. — Diese Sätze sind von Bedeutung für die Aufgabe, die Topologie der verschiedenen Raumarten „rein“ zu begründen, d. h. auf nur einem einzigen Begriff, wie abgeschlossene Hülle, Umgebung usw., aufzubauen. *Nöbeling* (Erlangen).

Dieudonné, J.: Sur les espaces uniformes complets. Ann. École norm., III. s. 56, 277—291 (1939).

Dieudonné, Jean: Sur les espaces topologiques susceptibles d'être munis d'une structure uniforme d'espace complet. C. R. Acad. Sci., Paris 209, 666—668 (1939).

In der 1. Arbeit zeigt Verf., daß das Ergebnis einer früheren Arbeit [C. R. Acad. Sci., Paris 207, 25—27 (1938); dies. Zbl. 19, 187] auch ohne die Voraussetzung der vollständigen Regularität richtig ist. Es werden weiter notwendige und hinreichende Bedingungen dafür hergeleitet, daß die universelle Struktur eines uniformisierbaren Raumes die Struktur eines vollständigen Raumes ist. Zum Schluß werden nochmals die Tychonoffschen Räume untersucht. — In der 2. Arbeit zeigt Verf. allgemeiner, daß, wenn die Topologie des Raumes E feiner ist als eine metrische Topologie, E mit der Struktur eines vollständigen Raumes versehen werden kann. *Nöbeling*.

Ribeiro, Hugo: Caractérisations des espaces réguliers normaux et complètement normaux au moyen de l'opération de dérivation. Portugaliae Math. 2, 13—19 (1941).

Ein Raum (V) im Sinne von Fréchet (Les espaces abstraits, Paris 1928) ist „accessible“, wenn die wie üblich definierte Ableitung A' einer Menge folgende Eigenschaften hat: $(A + B)' = A' + B'$; $A' \subset A'$; $A' = 0$, wenn A einpunktig ist. Ein solcher Raum heißt Hausdorffsch, resp. regulär, resp. normal, resp. vollständig normal, wenn für zwei Punkte A und B , bzw. eine abgeschlossene Menge A und einen Punkt $B \notin A$, resp. zwei fremde abgeschlossene Mengen A und B , resp. zwei fremde, in ihrer Summe abgeschlossene Mengen A und B gilt: der Raum enthält zwei fremde Mengen, in deren Innerem A bzw. B enthalten ist (Trennungsaxiom T_1, \dots, T_4). Für $T_2 - T_4$ werden vom Verf. äquivalente Axiome $D_2 - D_4$ hergeleitet, in welchen statt mit dem Inneren einer Menge mit der Ableitung gearbeitet wird [für T_1 ist die von A. Monteiro erledigt worden; Portugaliae Math. 1, 333—339 (1940); dies. Zbl. 23, 304]. *Nöbeling*.

Klassische theoretische Physik.

Mechanik:

● The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton. Vol. 2: Dynamics. Edit. by A. W. Conway a. A. J. McConnell. (Cunningham Mem. Nr. 14.) Cambridge: Univ. press 1940. XVI, 656 pag. 70/-.

Morse, Marston: La dynamique symbolique. C. R. Soc. Math. France année 1938, 46—52 (1939).

Überblick über die bisher erhaltenen Ergebnisse der symbolischen Dynamik.

E. Hopf (Leipzig).

Sokoloff, George: Sur les pôles des coordonnées dans le mouvement symétrique d'un système de points matériels qui s'agissent avec des forces dépendantes des distances mutuelles. Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine Nr 6, 33—47 u. franz. Zusammenfassung 49—50 (1941) [Ukrainisch].

L'auteur étudie le mouvement plan d'un système de trois points matériels P_0, P_1, P_2 de masses $m_0, m_1 = m_2$ s'attirant ou se repoussant avec des forces $g^2 m_i m_j f(r_{ij})$, $f(r)$ étant une fonction finie pour $r = 0$, holomorphe de r pour des valeurs réelles et positives de r et telle que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{f(r)}{r^{2\alpha-1}} = 2\alpha.$$

Les conditions initiales sont choisies de manière que les trois points forment constamment un triangle isocèle ($\overline{P_0 P_1} = \overline{P_0 P_2} = \varrho$). Il montre que si le mouvement est régulier pour $t < t_1$, mais pas au delà de t_1 , ϱ tendra, pour $t \rightarrow t_1$, vers une limite finie $\varrho_1 \geq 0$ ou bien vers l'infini. Il étudie plus spécialement le cas où, pour $t \rightarrow t_1$, ϱ tend vers

l'infini et donne le développement des fonctions qui déterminent le mouvement autour du point singulier $t = t_1$, suivant les puissances positives et entières de $r^{-\alpha_1}, r^{-\alpha_2}, \dots, r^{-\alpha_n}$, les α_i étant des constantes, linéairement indépendantes. *Kyrille Popoff* (Sofia).

Mayolo, Santiago Antunez de: Loi des forces dans un système gravitationnel du type Soleil-Planète. *Acta Pontif Acad. Sci.* 4, 89—94 (1940).

L'auteur admet que la force d'attraction dans le système Soleil-Planète peut être mise sous la forme

$$F = \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n - \frac{i G M m}{c^{i+1}} \left(\frac{S}{c} \right)^{i-1},$$

où G est la constante de la gravitation, M la masse du corps central, supposé fixe, m la masse de la planète, S la constante des aires et c la vitesse de la lumière. Il montre que dans le cas particulier $F = F_1 + F_3$ on obtient pour le mouvement du périhélie la formule d'Einstein. *Kyrille Popoff* (Sofia).

Subbotin, M. F.: Sur le calcul des inégalités séculaires. 1. Solution nouvelle du problème de Gauss. *Astron. J. Soviet Union* 18, 35—49 (1941).

Le calcul des perturbations séculaires du premier ordre, dans sa partie essentielle, se réduit au problème suivant de Gauss: déterminer l'attraction exercée par un anneau elliptique, la densité d'un de ses éléments quelconque étant proportionnelle à l'aire du secteur, ayant cet élément pour base et pour sommet le foyer de l'anneau, occupé par le Soleil. En tenant compte des circonstances particulières dans le système solaire, l'auteur donne deux solutions du problème suivant: Déterminer le potentiel, et par suite l'attraction, de l'anneau en un point extérieur à l'anneau. La première solution se rapporte au cas où le point attiré est situé tout près du plan de l'anneau et la seconde au cas où sa distance de ce plan est grande par rapport aux dimensions de l'anneau. — Soient m' la masse, $a', e' \dots$ les éléments de l'orbite de la planète perturbatrice P' et S le foyer de l'orbite de P' , occupé par le Soleil. L'auteur forme l'expression du potentiel d'un anneau de masse totale m' , répartie d'une manière continue le long de l'orbite de P' de manière que la densité d'un élément quelconque de l'anneau soit proportionnelle à l'aire du secteur ayant l'élément pour base et le foyer S pour sommet. En désignant par z la distance du point attiré M du plan de l'orbite de la planète perturbatrice et par φ l'angle que fait la projection, sur le plan de l'orbite, du rayon vecteur SM avec la direction du grand axe a' , l'expression du potentiel V de l'anneau au point considéré peut être mise sous la forme

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\varphi.$$

Dans le premier cas, où $\zeta = \frac{z}{a'}$ est petit, les coefficients A_n sont donnés comme séries procédant suivant les puissances positives et entières de ζ . Les expressions de ces coefficients sont moins simples dans le cas où ζ est relativement grand. *Kyrille Popoff*.

Rabe, E.: Periodische Lösungen für die Bewegung eines Doppelplanetoiden. *Astron. Nachr.* 271, 181—185 (1941).

Die Hillsche Methode zur Aufsuchung periodischer Lösungen des Dreikörperproblems in der Nachbarschaft der einen Masse wird übertragen auf den folgenden, durch Beobachtungen des Planetoiden Eros nahegelegten Fall: Um die Sonne bewegt sich in einer Kreisbahn der Schwerpunkt eines aus zwei Teilen bestehenden Planetoiden von sehr kleiner Masse; es sind die periodischen Bahnen der Bruchstücke relativ zum Planetenschwerpunkt aufzusuchen. Die Bahnen ergeben sich in erster Näherung als Kreise. Heranziehung von Beobachtungsdaten liefert für Eros eine Periode von 12.8 Minuten (bei einer Umlaufzeit des Schwerpunktes von 644 Tagen). *Klose*.

Siegel, Carl Ludwig: Der Dreierstoß. *Ann. of Math.*, II. s. 42, 127—168 (1941).

Wenn eine Lösung des Dreikörperproblems für $t \rightarrow -0$ singulär wird, so streben nach Sundmann die drei Punkte gegen bestimmte Grenzlagen, von denen mindestens

zwei zusammenfallen (Zweier- und Dreierstoß). Über den Zweierstoß weiß man seit Bisconsini und Sundmann genau Bescheid. Die Koordinaten sind an der Stelle $t = 0$ regulär analytische Funktionen von t . Die Natur der komplizierteren Dreierstoß-Singularitäten ist im wesentlichen ebenfalls bekannt. Untersuchungen darüber sind 1928 von G. Sokoloff angestellt worden [Conditions d'une collision générale des trois corps qui s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton. Acad. Sci. Ukraine (Mém.) 9, 1—64 (1928)]. Die unabhängig entstandene Arbeit des Verf. gibt eine vollständige, in vielen wesentlichen Punkten einfachere Theorie der Dreierstoßlösungen. — Sundmann hatte den grundlegenden Satz bewiesen, daß der Dreierstoß nur dann auftreten kann, wenn das resultierende vektorielle Moment verschwindet, außerdem bewies er, daß eine Bewegung mit der letzten Eigenschaft in einer festen Ebene durch den festgehaltenen Schwerpunkt erfolgt. Man kann sich also auf das ebene Dreikörperproblem beschränken. Es war auch bekannt, daß für das Dreierstoßproblem die speziellen (Lagrangeschen) Stoßlösungen von Wichtigkeit sind, bei denen die Verbindungsgeraden der drei Punkte je sich selbst parallel bleiben; das Dreieck ist bekanntlich entweder gleichseitig oder eine Strecke. — Durch Einführung geeigneter Koordinaten in einer geeignet bewegten Bezugsebene (Elimination der Knoten; die Richtung vom ersten zum zweiten Punkt ist in ihr die ihrer x -Achse, der dritte Punkt hat eine nicht-negative Ordinate), sodann durch eine Koordinatenstreckung und durch $t = -e^{-s}$ führt Verf. die Bewegungsgleichungen in ein Differentialsystem

$$(1) \quad \frac{du_i}{ds} = f_i(u_1, \dots, u_n); \quad i = 1, \dots, n$$

($n = 6$) und eine Quadraturaufgabe über. (1) hat vier stationäre Lösungen $u = \hat{u}$, die den vier möglichen Lagrangebewegungen in jener Ebene entsprechen; eine von ihnen realisiert den gleichseitigen, drei verwirklichen den geradlinigen Fall. Verf. beweist, daß alle Bewegungen mit Dreierstoß für $t \rightarrow -0$ genau den zu einem \hat{u} asymptotischen Lösungen von (1), $u \rightarrow \hat{u}$, $s \rightarrow \infty$, entsprechen. — Hervorgehoben sei die vereinfachte Behandlung des klassischen Problems, alle zur stationären Lösung $u = 0$ (es wird $f(0) = 0$ in (1) vorausgesetzt) asymptotischen Lösungen eines Systems (1) zu bestimmen, wenn die f_i in der Umgebung von $u = 0$ regulär analytisch sind. Es mögen genau p der charakteristischen Wurzeln der linearisierten Gleichungen (1) einen negativen Realteil und keine den Realteil Null haben. Die Konvergenz der von p Parametern abhängigen Liapounoff-Poincaré-Reihen und die Darstellung aller asymptotischen Lösungen durch dieselben wird in vereinfachter Weise bewiesen. — Durch Anwendung auf den Dreierstoß ergibt sich: Die Bewegungen mit Dreierstoß für $t \rightarrow -0$ hängen, wenn man zwei zur Deckung zu bringende Stoßbewegungen als identisch ansieht, im gleichseitigen Fall von drei, im geradlinigen Fall von zwei Parametern ab. Die Koordinaten werden durch irreguläre Potenzreihen von t dargestellt. Die Stelle $t = 0$ ist im allgemeinen ein logarithmischer Verzweigungspunkt für die Koordinaten. Die drei Punkte münden in bestimmten Richtungen im Schwerpunkt. *E. Hopf.*

Chazy, Jean: Sur une loi corrective de la loi de Newton. J. Math. pures appl., IX. s. 19, 261—280 (1940).

M. Popović, en considérant un soleil, centre des ondes lumineuses, attirant une planète opaque suivant la loi de Newton et exerçant une action repulsive, due aux radiations qui se propagent avec la vitesse de la lumière, arrive à l'expression

$$(1) \quad F = -\frac{fMm}{r^2} \left(1 + \varepsilon \frac{dr}{dt} \right)$$

de la résultante des forces agissant sur la planète. Si l'attraction est instantanée, la constante ε sera inversement proportionnelle à la vitesse de la lumière et proportionnelle à la surface de la planète. M. Armellini considère la formule ci-dessus comme formule présentant l'attraction entre deux points de masses M et m , la constante ε étant indépendante de la surface. M. Chazy, en adoptant la manière de voir de

M. Armellini, considère cette formule comme formule corrigée de Newton et étudie le mouvement d'un point de masse m autour du soleil, réduit à une sphère homogène de centre O , de rayon R et de masse M , en tenant compte de la rotation du soleil qui détermine un changement de la distance r entre la planète de masse m et les différents parties du soleil entier. Un résultat immédiat de cette hypothèse est que la trajectoire de la planète tend asymptotiquement vers une circonférence de centre O . M. Chazy calcule ensuite les corrections des variations séculaires des éléments du mouvement de la planète. En les comparant avec les valeurs données par Newcomb comme résidus de la théorie newtonienne, il arrive à la conclusion suivante: Parmi les corrections, apportées par la loi de force (1) à la théorie newtonienne des mouvements planétaires, celle dont l'effet est le plus grand est la correction de la dérivée du grand axe osculateur, ce qui introduit une accélération séculaire dans l'expression de la longitude des planètes. La correction correspondant au terme correctif, introduit par Armellini, est très petite et ne peut donner aucune explication de l'anomalie célèbre du mouvement de Mercure.

Kyrille Popoff (Sofia).

Chazy, Jean: Sur une loi corrective de la loi de Newton. *Bull. Astron.*, Paris II. s. 12, 89—97 (1940).

Dans un mémoire antérieur (cfr. l'analyse précédente) l'auteur a calculé les corrections, résultant de la loi de force (1) $-\frac{f m m'}{r^2} \left(1 + \varepsilon \frac{dr}{dt}\right)$ dans la théorie newtonienne, des mouvements planétaires par une transformation des équations différentielles classiques de Lagrange entre les éléments osculateurs. Dans le présent mémoire il forme, par une application analogue du calcul vectoriel, les expressions des composantes radiale, transversale et orthogonale de la force corrective, correspondant à la loi (1), en considérant un soleil réduit à une sphère homogène de centre O , de rayon R , de masse M et animé d'une rotation d'ensemble, constante en grandeur et en direction, et une planète réduite à un point. Il forme ensuite les corrections δa , δe , δi et $d\Omega$, dues au terme correctif de la loi de Newton.

Kyrille Popoff (Sofia).

Plăcișteanu, I. I., et V. L. Nadolschi: Sur une nouvelle loi newtonienne. *Ann. Sci. Univ. Jassy*, I: 26. Math. 397—405 (1940).

Les auteurs considèrent la loi corrective de Newton sous la forme

$$F = -\frac{f m m'}{r^2} \left(1 + \varepsilon \frac{dr}{dt}\right)$$

que Popovici a établie en tenant compte de la pression des radiations solaires se propageant avec la vitesse de la lumière. Ils cherchent une nouvelle base physique pour la valeur numérique de ε dans la théorie quantique de la structure fine, dans des considérations d'ordre cosmique et dans l'hypothèse d'une perte de masse matérielle à travers les espaces cosmiques. (Voiie les analyses précédentes). *Kyrille Popoff*.

Garcia, Godofredo: Reduktion der Pendelgleichungen auf die Volterrasche Gleichung zweiter Art. *Acta Pontif. Acad. Sci.* 4, 147—152 (1940) [Spanisch].

Kyrille Popoff avait réduit les équations différentielles du mouvement pendulaire d'un projectile, dans le cas d'une trajectoire plane, à des équations intégrales de Volterra de seconde espèce. L'auteur effectue cette réduction dans le cas général d'une trajectoire gauche.

Kyrille Popoff (Sofia).

Correll, Walter: Zusehrift zu: H. Athen: Interpolationsverfahren zur Berechnung von Flugbahnseharen und ihre Veränderung durch Variation der ballistischen Grundwerte. [Z. angew. Math. Mech. Bd. 19 (1939), S. 361 bis 371.] Z. angew. Math. Mech. 21, 63—64 (1941).

Athen, H.: Erwiderung. Z. angew. Math. Mech. 21, 64 (1941).

C. bemerkt, daß in einer früheren Arbeit von A. (dies. Zbl. 22, 414) Fehlerabschätzungen in Unabhängigkeit von der Flugzeit t gegeben werden, während tatsächlich eine starke Abhängigkeit von t besteht. Hierdurch ergibt sich bei einem numerischen Beispiel für eine Schußweite, daß der Unterschied gegenüber dem exakten Wert fünfmal so groß wird, wie er nach der Formel von A. zu erwarten ist. — A. gibt in der Erwiderung den Einwand von C. als

berechtigt zu und erklärt, daß seine die Flugzeit vernachlässigende Formel den Fehler nicht seiner Größe nach liefern, sondern für ihn nur einen ganz rohen, der ersten Orientierung dienenden Anhalt geben sollte.

Werner Schulz (Berlin).

Elastizität, Akustik:

Sakadi, Zyuro: On elasticity problems when the second order terms of the strain are taken into account. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 22, 999—1009 (1940).

Die Gleichungen des Gleichgewichtes und der Bewegung elastischer Systeme werden mit Berücksichtigung der Glieder 2. Ordnung in den Verzerrungsgrößen angesetzt, bei diesen wird auch die Dichteänderung berücksichtigt. Unter dieser Voraussetzung werden in den Spannungs-Dehnungs-Gleichungen — außer den Laméschen Konstanten λ und μ — noch acht weitere elastische Konstanten eingeführt. Die Gleichungen können dadurch vereinfacht werden, daß zuerst das lineare Problem gelöst wird und die so gefundenen Lösungen für die Verzerrungsgrößen in die quadratischen Glieder eingeführt werden. In derselben Auffassung werden auch die zugehörigen Grenzbedingungen formuliert. — Als Anwendungen werden behandelt: longitudinale und transversale Wellen, gleichmäßige Zusammendrückung und Dehnung eines geraden Stabes, Zusammendrückung einer Kugel- und Zylinderschale, Verdrehung eines Kreiszylinders. — Die Arbeit weist ein Minimum an erklärendem Text auf.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Deuker, Ernst-August: Beitrag zur Theorie endlicher Verformungen und zur Stabilitätstheorie des elastischen Körpers. Deutsche Math. 5, 546—562 (1941).

Die an früherer Stelle entwickelte linearisierte Elastizitätstheorie in allgemeinen krummlinigen Koordinaten (s. dies. Zbl. 24, 133) wird erweitert zu einer Theorie endlicher Verschiebungen. Die Definition des Spannungstensors ändert sich nicht; dagegen erfordern die Frage nach den Formänderungen (der Relativbewegung zwischen körperfestem und raumfestem Koordinatensystem), insbesondere auch die Definition des Verzerrungstensors und die Berechnung seiner ersten Variation neue Überlegungen. Den Gleichgewichtsbedingungen am verformten Element, die wieder mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen abgeleitet werden, gibt Verf. eine formal sehr übersichtliche Gestalt. Bei der Gewinnung eines einfachen Ansatzes für die Energiefunktion des elastischen Körpers erweist sich die Benutzung zweier Verzerrungsdefinitionen (Beziehung auf die unverzerrten oder die verzerrten Längen) nebeneinander als nützlich. — Zum Schluß wird der Zusammenhang hergestellt zwischen der allgemeinen Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen und der charakteristischen Fragestellung der Stabilitätstheorie.

Marquerre.

Kiltehevsky, N.: Les équations fondamentales de l'équilibre des enveloppes élastiques et quelques méthodes de leur intégration. 3. Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine Nr 6, 51—104 u. franz. Zusammenfassung 104—105 (1941) [Ukrainisch].

Les équations d'équilibre d'une enveloppe élastique ont été déduites par l'auteur dans la première et la seconde partie de ce travail (Rec. Trav. Inst. Math. Acad. Sci. RSS Ukraine 1940, Nr 4 u. 5; voir ce Zbl. 23, 411; 24, 90). La troisième partie contient un exposé de méthodes d'intégration de ces équations. Ces méthodes reposent sur la réduction du problème à la résolution d'un système d'équations intégrales. — L'auteur examine la question de l'existence et de l'unicité de la solution et il considère enfin quelques méthodes de résolution approchée analogues à celle de Ritz.

B. Hostinský (Brünn).

Green, A. E.: General bi-harmonic analysis for a plate containing circular holes. Proc. roy. Soc., Lond. 176, 121—139 (1940).

Verf. gibt für gewisse allgemeine ebene Spannungsverteilungen in einer unendlichen Platte, welche kreisförmige Löcher verschiedener Größe und Anordnung besitzt, unter gewissen Konvergenzbedingungen die Lösung in Form von trigonometrischen Reihen an. Der Einfluß geradliniger Begrenzung, so der Fall eines unendlich langen

Streifens wird untersucht. Der Sonderfall einer senkrecht zur Verbindungslinie der Kreismittelpunkte gleichmäßig gezogenen Platte wird numerisch ausgewertet und mit den Versuchsergebnissen von P. L. Cäpper verglichen. Bei der gewählten Teilung erweist sich der Einfluß der Plattenkanten auf die Spannungswerte als recht beträchtlich. Garten (Dessau).

Swoboda, H.: Zum dreidimensionalen Spannungszustand der kreisrunden Platte. Z. angew. Math. Mech. 20, 336—350 (1940).

Bei Lasten, die auf kleinen Flächen einer Platte wirken, liefert die Kirchhoffsche Plattentheorie erhebliche Abweichungen von den beobachtbaren Werten. Verf. unternimmt es daher, den Spannungszustand einer kreisrunden Platte nach dreidimensionalen Ansätzen zu bestimmen. Das geschieht folgendermaßen: Es wird der Spannungszustand in dem Halbraum $y < 0$, der durch eine Einzellast im Nullpunkt beansprucht wird, aus einer Airyschen Spannungsfunktion $F(y, r)$ ermittelt, die auf Grund des C. Weberschen Ansatzes in der Form $F = \Phi_1 + y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}$ angenommen werden kann. Wegen der rotationssymmetrischen Belastung in der Ebene darf hier sogar $\Phi_1 = -\Phi_2 = \Phi$ gesetzt werden. Mit den Bezeichnungen $\varphi = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$ und $\bar{\varphi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}$ nimmt der Spannungszustand im Halbraum die Form

$$\sigma_y = \varphi - y \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \sigma_r = 2\mu(\varphi - \bar{\varphi}) + \bar{\varphi} + y \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y},$$

$$\sigma_t = (\varphi - \bar{\varphi}) + 2\mu\bar{\varphi} + y \frac{\partial(\varphi - \bar{\varphi})}{\partial y}, \quad \tau = -y \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r}$$

an mit

$$\Phi = -\frac{P}{2\pi} \cdot \ln(R - y).$$

Schneidet man aus dem Halbraum eine Platte durch die Ebene $y = -h$ heraus, so wird diese Unterseite der Platte durch Normalspannungen sowie durch radial verteilte Schubspannungen beansprucht sein. Überlagert man nun einen geeigneten Spannungszustand, der die Schubspannung der Unterseite der Platte zu Null macht und die Oberseite nur durch Normalspannungen beansprucht, so kann man durch Überlagern von weiteren geeigneten Spannungszuständen, die stets Unter- und Oberseite der Platte schubspannungsfrei lassen, die zusätzlichen Normalspannungen auf Unter- und Oberseite der Platte allmählich zum Verschwinden bringen. Die zu überlagernden Spannungszustände werden auf Grund des C. Weberschen Ansatzes für rotationssymmetrische Spannungszustände in der Form

$$\sigma_y = \varphi_a - y \frac{\partial \varphi_a}{\partial y} + \varphi_b - (y + h) \frac{\partial \varphi_b}{\partial y}, \quad \tau = -y \frac{\partial \varphi_a}{\partial r} - (y + h) \frac{\partial \varphi_b}{\partial r}$$

angegeben, wobei φ_a und φ_b durch folgende Reihen gegeben sind:

$$\varphi_a = \varphi_{a_1} + \varphi_{a_2} + \dots + \varphi_{a_i} + \dots, \quad \varphi_b = \varphi_{b_1} + \varphi_{b_2} + \dots + \varphi_{b_i} + \dots$$

mit

$$\varphi_{a_1} = \varphi_0 + \varphi_{-1}, \quad \varphi_{b_1} = 0.$$

Hierbei ist weiter:

$$\varphi_{a_2} = (\varphi_1 + \varphi_{-2}), \quad \varphi_{a_3} = (\varphi_2 + \varphi_{-3}) + (2h)^2 \frac{\partial^2 (\varphi_1 + \varphi_{-2})}{\partial y^2},$$

$$\varphi_{b_2} = 2h \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_1 - \varphi_{-1}), \quad \varphi_{b_3} = 2(2h) \frac{\partial(\varphi_2 - \varphi_{-2})}{\partial y} \text{ usw.}$$

mit

$$\varphi_k = +\frac{P}{2\pi} \cdot \frac{y_k}{R_k^2}, \quad y_k = y_0 - 2kh; \quad y_0 = 2kh$$

und

$$R_k = \sqrt{y_k^2 + r^2}.$$

Bricht man den Näherungsansatz bei einer gewissen Stelle ab, so kann man die restlichen Normalspannungen an der Ober- und Unterseite endgültig zum Verschwinden bringen, indem man den durch die Kirchhoffsche Plattentheorie bestimmten Spannungszustand überlagert. Durch sukzessive Überlagerung von weiteren Spannungs-

zuständen gelingt es Verf., auch die Randspannungen der Kreisplatte allmählich zum Verschwinden zu bringen. Ähnlich wird auch die frei drehbar gelagerte Platte behandelt. Zum Schluß untersucht Verf. noch die Kreisplatte mit verteilter Belastung.

U. Wegner (Heidelberg).

Bechmann, R.: Elastische Schwingungen eines anisotropen Körpers von der Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds. (*Laborat. d. Telefunken-Ges., Berlin.*) Z. Physik 117, 180—197 (1941).

Babakov, I. M.: Zur Berechnung der höheren Eigenfrequenzen der Drehbewegungen von reduzierter Welle. J. appl. Math. u. Mech. 5, Nr 1, 109—123 u. dtsch. Zusammenfassung 124 (1941) [Russisch].

Les vibrations propres d'un arbre tournant (composé de n sections) peuvent être calculées à l'aide du système d'équations

$$\lambda_i = (p^2 - a^2) \sum_{j=1}^n A_{ij} \lambda_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

où a est la fréquence donnée de l'arbre tournant; on a $A_{ij} = A_{ji}$. Les vibrations propres de ce système correspondent à celles de l'arbre libre; les valeurs propres relatives au premier cas sont $p_i^2 - a^2$ où p_i représentent les fréquences propres de l'arbre libre. La valeur absolue de la plus petite constante caractéristique ($p^2 - a^2$) de (1) est égale à celle du système

$$\lambda_i = q \sum_{j=1}^n \overline{A_{ij}} \lambda_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

qui est la plus petite en valeur absolue; $\overline{A_{ij}}$ est la valeur absolue de A_{ij} . La plus petite des valeurs $p_i^2 - a^2$ peut être déterminée par un procédé d'approximations successives. — L'auteur donne deux exemples numériques; il montre comment les quantités A_{ij} peuvent être déterminées en choisissant convenablement la fréquence a .

B. Hostinský (Brünn).

Hydrodynamik:

Bechert, Karl: Über die Ausbreitung von Zylinder- und Kugelwellen in reibungs-freien Gasen und Flüssigkeiten. Ann. Physik, V. F. 39, 169—202 (1941).

Der Verf. geht von den vereinfachten Strömungsgleichungen aus, die für longitudinale Wellen mit kugel- oder zylindersymmetrischen bzw. ebenen Phasenflächen gelten. Alle drei Fälle sind (für die Werte 1, 2, 3 eines Parameters k) im selben Gleichungssystem unterzubringen, desgleichen verschiedene physikalisch wichtige Fälle der Druck-Dichte-Beziehung (verschiedene Werte eines zweiten Parameters n). Nach gewissen Umformungen werden in Teil II zunächst nur solche Lösungen betrachtet, bei denen zwischen Dichte ρ und Strömungsgeschwindigkeit u ein fester Zusammenhang besteht. Für sie läßt sich das Problem auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen, die gestattet, gewisse allgemeine Eigenschaften ihrer Lösungen unmittelbar abzulesen. Vor allem, daß feste Werte von Dichte und Strömungsgeschwindigkeit solcher Wellen mit konstanter Geschwindigkeit fortschreiten, wobei aber im allgemeinen Verzerrung der Wellen eintritt und unter gewissen Voraussetzungen Stoßwellen auftreten. Ein singuläres Integral besitzt nur geringe physikalische Bedeutung, für Flüssigkeiten ($n = -1$) gelingt jedoch die Aufstellung eines allgemeinen Integrals, das am Beispiel einer speziellen Zylinderwelle erläutert wird. Teil III der Arbeit versucht, zu allgemeineren Lösungen fortzuschreiten, welche nicht mehr an die Beziehung $f(\rho, u) = 0$ gebunden sind. Auch für bestimmte Formen von $f(\rho, u, r) = 0$ gelingt die Zurückführung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, und die Erörterung allgemeiner Eigenschaften ihrer Lösungen. Eine allgemeine Lösung konnte jedoch auch im Falle $n = -1$ nicht mehr angegeben werden [außer für die in früheren Arbeiten des Verf. behandelten ebenen Wellen; vgl. Ann. Physik 37, 89 u. 38, 1 (1940); dies. Zbl. 23, 183 u. 415]. — Dem steht die mathematische Schwierigkeit im Wege, bei simultanen Differentialgleichungen aus dem vollständigen Integral das allgemeine zu

finden; ein Verfahren von Forsyth, welches anhangsweise erörtert wird, scheint nicht gangbar zu sein. Fues (Breslau).

Vandrey, F.: Die Einstromung einer idealen Flüssigkeit in eine kreisförmige Bordasche Mündung. Ing.-Arch. 11, 432—437 (1940).

Zum Vergleich mit dem von Helmholtz (Berl. Monatsber. 1868) gelösten entsprechenden ebenen Problem wird für den räumlichen drehsymmetrischen Fall des Einstromens einer idealen Flüssigkeit in ein kreisförmiges Rohr mit Strahlablösung (Bordasche Mündung) eine numerische Lösung angegeben. Unter Benutzung gewisser, von vornherein bekannter Strömungseigenschaften läßt sich ein als Ausgangsnäherung brauchbarer Strahlrand zeichnen. Die Berechnung der vollständigen Strömung mit diesem vorgegebenen Strahlrand erfolgt numerisch nach dem Liebmannschen Mittelungsverfahren. Der Vergleich der hiernach errechneten Geschwindigkeiten am Strahlrand mit dem geforderten konstanten Wert führt sodann zu einer verbesserten Annahme über die Form des Strahlrandes. Eine weitere Verbesserung ergibt sich auf graphischem Wege. — Mathematisch handelt es sich um eine numerische Lösung der Gleichung

$$\Psi_{zz} + \Psi_{rr} - \frac{1}{r} \Psi_r = 0$$

mit den Randbedingungen

$$1) \Psi = 0 \quad \text{für } r = 0. \quad 2) \Psi = -\frac{1}{2} V r^2 \quad \text{für } 0 \leq r \leq \frac{R}{2} \sqrt{2} \quad \text{bei } z \rightarrow -\infty.$$

$$3) \Psi = -\frac{1}{4} V R^2 \quad \text{für Strahlrand und Rohrwandung } r = R, z \leq 0.$$

4) $\Psi = -(1 - z/\sqrt{r^2 + z^2}) R^2 V/8$ im Außenraum weit von der Rohrmündung. — Die Ergebnisse werden in Form des Trajektorienbildes der Potential- und Stromlinien sowie durch Angabe der Isotachen mitgeteilt. Der Hauptunterschied gegen den ebenen Fall besteht in einem schnelleren Übergang zur Parallelströmung im drehsymmetrischen Fall. Garten (Dessau).

Neronoff, N.: Über die wirbelfreie stetige zweidimensionale Bewegung einer unendlich reibungslosen Flüssigkeit um einen unbeweglichen Zylinder. Z. angew. Math. Mech. 20, 329—335 (1940).

In Weiterführung früherer Arbeiten des Verf. [Accad. naz. Lincei, Mem., VI. s. 5, 255—269 (1933) und Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 23, 381—399, 471—475 (1937); dies. Zbl. 17, 69, 70] wird die ebene Potentialströmung um gewisse Konturen mit zwischen den Staupunkten liegenden Ecken untersucht. Zu diesem Zweck wird die in der z -Ebene gelegene Kontur auf ein Stück der reellen Achse in der w -Ebene konform abgebildet. Die Abbildungsfunktion hat die Form

$$z = c_0 + c_1 w + \sum_{p+q=n} \left\{ c_n(p, q) w^{\frac{p}{n}} (w - w_0)^{\frac{q}{n}} + c'_n(p, q) w^{\frac{p}{n}} (w - w_1)^{\frac{q}{n}} + c''_n(p, q) (w - w_1)^{\frac{p}{n}} (w - w_0)^{\frac{q}{n}} \right\},$$

wobei $p \geq 1, q \geq 1, n \geq 2$ natürliche Zahlen, $w_0 > w_1 > 0$ reelle Parameter und die c (bis auf gewisse Einschränkungen willkürliche) komplexe Koeffizienten sind. An einem einfachen Beispiel wird das Verfahren erläutert. Weissinger (Adlershof).

Jacob, Caïus: Sur un problème de M. Slioskine. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 23, 263—265 (1941).

Als Ergänzung zu einer Note von N. A. Slioskine [C. R. Acad. Sci. URSS 3, 419 bis 421 (1936)] wird gezeigt, daß das dort behandelte Problem der langsamen Umströmung eines Kreiszyinders in einer zusammendrückbaren Flüssigkeit unter Zugrundelegung des Gasgesetzes von Tchapligne sich auf das folgende, rein analytische Problem zurückführen läßt. Es ist eine außerhalb des Kreises $|\zeta| = 1$ reguläre analytische Funktion $\Omega(\zeta) = \Theta + iT$ ($\zeta = \xi + i\eta$) zu bestimmen, welche auf

$\zeta = e^{i\sigma}$ ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$) der Bedingung

$$\frac{dT}{dn} = 1 - \lambda (ae^{-T(\sigma)} + 4b \sin^2 \sigma e^{T(\sigma)})$$

genügt (a, b von der Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen abhängende Konstanten, $a + b = 1$). Der positive Parameter λ ist derart zu bestimmen, daß im Unendlichen $T(\xi, \eta) = 0$ gilt. Es wird insbesondere untersucht, wann λ diese Bedingung erfüllt.

Garten (Dessau).

Tychonov, A. I.: Ebenes Problem der Bewegung eines Flügels unter der Oberfläche einer schweren Flüssigkeit endlicher Tiefe. Bull. Acad. Sci. URSS, Cl. Sci. techn. Nr 4, 57—78 (1940) [Russisch].

Das Problem der Bewegung eines Flügels bzw. eines Körpers allgemeinerer Gestalt unter der Oberfläche einer schweren Flüssigkeit unendlicher Tiefe wurde von Keldisch und Lavrentieff bzw. von Kotschin (beide Arbeiten sind im Verlag des Zentralen Aerohydrodynamischen Instituts [Joukovsky] 1937 erschienen) bearbeitet. — In der vorliegenden Arbeit wird der durch einen analytischen Kurvenbogen gegebene Flügelquerschnitt durch eine Wirbelverteilung ersetzt und demgemäß das Problem zunächst für einen einzelnen Wirbelfaden gelöst. Auftrieb und Widerstand werden in diesem Fall mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln in Abhängigkeit von Geschwindigkeit und Eintauchtiefe ausgerechnet. — Der Flügel Fall führt auf eine Integralgleichung erster Art mit singulärem Kern, für deren Lösung ein Näherungsverfahren angegeben wird. — Für den Fall der ebenen Platte werden numerische Ergebnisse mitgeteilt.

K. Schröder (Berlin).

Wieghardt, K.: Zusammenfassender Bericht über Arbeiten zur statistischen Turbulenztheorie. (Kaiser Wilhelm-Inst. f. Strömungsforsch., Göttingen.) Luftf.-Forsch. 18, 1—7 (1941).

Kurzer Bericht über die englischen und amerikanischen Arbeiten der Jahre 1937/38 zur Turbulenzfrage. Nach einer Besprechung der Dissipationsfunktion wird die isotrope Turbulenz behandelt, die Korrelationsfunktion, das Spektrum der Turbulenz. Als Anwendungsbeispiele werden besprochen das zeitliche Abklingen der Turbulenz durch die Reibung und das Ähnlichkeitsgesetz für den Umschlagpunkt (es ist der Punkt, an dem die Reibungsschicht an einem angeströmten Körper turbulent wird).

Bechert (Gießen).

Dive, Pierre: Rotations barotropes dans un astre fluide dont la stratification est ellipsoïdale en seconde approximation. Ann. École norm., III. s. 56, 293—316 (1939).

Es wird gezeigt, daß bei einem flüssig angenommenen Stern, bei dem die Flächen gleicher Dichte Ellipsoide sind, barotrope Rotation auch in der zweiten Näherung, welche durch die Mitführung der 4. Potenzen der als klein angenommenen Abplattungen charakterisiert ist, möglich ist. — Bei barotroper Rotation sind die Flächen gleicher Winkelgeschwindigkeit Zylinder um die Rotationsachse. Als unabhängige Veränderliche werden der Abstand x von der Rotations- (z -) Achse und die kleine Halbachse β des Rotationsellipsoids eingeführt, auf dessen Oberfläche die konstante Dichte ρ herrscht. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für barotrope Rotation wird darin gefunden, daß die Funktion $N(\beta, x^2) = -Z/4\pi f z$ (Z Komponente der Anziehungskraft in z -Richtung, f Gravitationskonstante) die Form $N = N_0/(1 + \mu x^2)$ hat, wo N_0 und μ nur von β abhängen. N kann, da es sich um Ellipsoide handelt, analytisch ausgedrückt werden. Der obengenannten zweiten Näherung entspricht das System der Gleichungen

$$\mu N_0 + \frac{\partial N}{(\partial x^2)_0} = 0 \quad \text{und} \quad \mu \frac{\partial N}{(\partial x^2)_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{(\partial x^2)_0^2} = 0.$$

Bei seiner Auswertung führt es auf ein System von drei Integro-Differentialgleichungen, das auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. Eine dieser Gleichungen ist mit der bekannten von Clairaut-Radau identisch. Es ergibt sich für die Abplattungen der

Ellipsoidschalen eine zweifach, für die Dichteverteilung eine dreifach unendliche Schar von Funktionen; das heterogene barotrope Ellipsoid in zweiter Annäherung existiert somit. — Einige Sätze für die Nähe des Mittelpunktes werden noch besonders vermerkt. So ist die Abplattung im Mittelpunkt stets > 0 , und nur dann kann eine Schicht gleicher Dichte sphärisch sein; wenn die ganze Masse in Ruhe ist. *Walter.*

Thermodynamik:

Roy, Louis: Sur les actions magnétiques, électriques, électrodynamiques et électromagnétiques dans les corps rigides ou déformables. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. s. 3, 1—69 (1939).

Das Ziel der sehr umfangreichen und langwierige Rechnungen bergenden Arbeit ist eine vollständige, gleichzeitig thermodynamisch einwandfreie Formulierung der Kräfte, die zwischen starren oder deformierbaren, sowohl elektrisch als magnetisch, teils permanent, teils induktiv polarisierten Körpern wirksam sind, wenn diese zum Überfluß auch noch von elektrischen Leitungsströmen durchflossen werden. — Als Ausgangspunkt dienen die Hauptsätze der Thermodynamik, in deren ersten passende Energie- (bzw. freie Energie-) Glieder eingeführt werden, welche die elektrischen und magnetischen Zustandsänderungen der Materie energetisch beschreiben und die aus früheren Arbeiten des Verf. oder anderer Autoren entnommen werden. Weder die Umformungen der Grundgleichung noch das Ergebnis all dieser Rechnungen lassen sich einfach zusammenfassen; auf eine Wiedergabe muß daher hier verzichtet werden. Der deutsche Leser muß übrigens eine ihm ungewohnte Art der Bezeichnung, in der z. B. keinerlei Gebrauch von Vektorrechnung gemacht ist, erst überwinden. *Fues.*

Verschaffelt, J.-E.: La thermomécanique des fluides en mouvement stationnaire et Peffet Joule-Thomson. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 26, 193—210 (1940).

Anwendung der Prinzipien der Thermodynamik auf die stationäre Bewegung einer Flüssigkeit. Die Energiedissipation setzt sich aus einem Anteil durch innere Reibung und einem durch Wärmeleitung additiv zusammen (derselbe Ausdruck gilt auch bei nichtstationären Strömungen; d. Ref.). Anwendung auf den isothermen und auf den adiabatischen Joule-Thomson-Effekt. Verallgemeinerung auf dissoziierende Gase.

J. Meizner (Berlin).

Kohler, Max: Schallabsorption in Mischungen einatomiger Gase. Ann. Physik, V. F. 39, 209—225 (1941).

In Mischungen einatomiger Gase tritt zur Schallabsorption durch innere Reibung und Wärmeleitung noch eine solche durch Diffusion und Thermodiffusion hinzu. Die Grundgleichungen der Bewegung von Mischungen einatomiger Gase werden der Dissertation von Enskog (Uppsala 1917) entnommen. In üblicher Weise wird auf Dichtewellen sehr kleiner Amplitude spezialisiert. Der Ansatz ebener Schallwellen gibt dann den Absorptionskoeffizienten. Zu den Gliedern, die von der inneren Reibung und der Wärmeleitung herrühren und schon von Kirchhoff angegeben wurden, treten drei weitere Glieder mit denselben Druck- und Frequenzabhängigkeit. Das erste Glied rührt von der gewöhnlichen Diffusion her, ist proportional zum Quadrat der Differenz der Molekulargewichte, zum Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p/c_v und zu den beiden Molkonzentrationen. Das zweite Glied entspricht der Thermodiffusion und ist proportional zu $c_p/c_v - 1$, zu den beiden Molkonzentrationen und zur Differenz der beiden Molekulargewichte; es kann positiv oder negativ sein. Das dritte Glied rührt von der durch die Thermodiffusion vergrößerten Wärmeleitung her. Diese Glieder werden für verschiedene Ansätze der Wechselwirkung zwischen gleichen und ungleichen Atomen, die von Enskog näher untersucht wurden, diskutiert. Die Schallabsorption durch Diffusion und Thermodiffusion spielt nur dann eine Rolle neben der durch innere Reibung und Wärmeleitung, wenn die Molekulargewichte oder die Molekülgrößen sehr verschieden sind; bei Isotopengemischen ist ihr Beitrag zur Schallabsorption im allgemeinen gering; dasselbe dürfte für Luft gelten.

J. Meizner (Berlin).

Elektrodynamik:

● **Mie, Gustav: Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Eine Experimentalphysik des Weltäthers für Physiker, Chemiker, Elektrotechniker. 2., vollst. umgearb. Aufl. Stuttgart: Ferdinand Enke 1941. XVIII, 638 S. u. 318 Abb. RM. 46.—.**

Zur Zeit wohl das umfassendste Anfängerlehrbuch des Elektromagnetismus. Die Darstellung ist elementar und verwendet nur einfache mathematische Formeln. Die wichtigen theoretischen Überlegungen sind mit Sorgfalt des Ausdrucks vorgetragen; die Darstellung geht bis zur speziellen Relativitätstheorie und zur Quantentheorie. Für den theoretischen Physiker sind die grundsätzlichen Bemerkungen anregend, die sich an vielen Stellen des Buches finden; z. B. „man darf sagen, daß die Quantenphysik, konsequent durchgedacht, zu der Vorstellung führen muß, daß der Äther auch da, wo wir nur 'leere' Räume sehen, von rasch wechselnden, regellosen und heute noch sehr rätselhaften Vorgängen erfüllt ist“.

Bechert (Gießen).

Mariani, Jean: Une interprétation géométrique des équations de Maxwell dans le vide. C. R. Acad. Sci., Paris 211, 768—771 (1940).

Verf. will die Maxwell'schen Gleichungen des leeren Raumes als Darstellung der Gruppe der Drehungen in einem sechsdimensionalen Raume erhalten. Hierzu geht er von den Grundgleichungen der infinitesimalen Transformationen in einem solchen Raume aus und insbesondere von den Gleichungen infinitesimaler Drehungen. Er zeigt, daß die Gruppe dieser Drehungen durch Funktionen dargestellt werden kann, welche genau den Maxwell'schen Gleichungen im leeren Raum entsprechen. *M. J. O. Strutt.*

Sommer, F.: Die Berechnung der Kapazitäten bei Kabeln mit einfachem Querschnitt. Elektr. Nachr.-Techn. 17, 281—294 (1940).

Es handelt sich um die Lösung folgender Potentialaufgabe: Das Potential soll im Innern eines ebenen, kreisförmigen Querschnitts derart bestimmt werden, daß es auf dem äußeren Begrenzungskreis sowie auf mehreren Kreisen im Innern des Querschnitts konstante Werte erhält. Verf. behandelt zunächst die bisher für die Lösung dieser Aufgabe vorgeschlagenen Verfahren, welche im wesentlichen darin bestehen, daß an richtig gewählten Stellen des Querschnitts Linienquellen angeordnet werden. Durch Verwendung einfacher Linienquellen läßt sich nach Breisig bereits eine für viele Fälle genügende Lösung angeben, wobei der Fehler im wesentlichen darin besteht, daß die Kurven konstanten Potentials im Innern des Begrenzungskreises von der Kreisform etwas abweichen. Die Methode der elektrischen Bilder und der Spiegelung gibt ein zweites Näherungsverfahren, das den Vorteil bietet, durch schrittweise Näherung eine beliebig genaue Lösung des Problems zu liefern. Als drittes Verfahren behandelt Verf. die Verwendung von Mehrfach-Linienquellen. Auch diese Lösung kann durch schrittweise Näherung beliebig genau weitergeführt werden. Auf Grund der Potentiallösung gibt Verf. an, wie die Ladungen und Kapazitäten der einzelnen Leitungsoberflächen berechnet werden müssen. Die Ergebnisse werden für eine Reihe von praktisch bei Kabeln auftretenden Anordnungen formel- und kurvenmäßig zusammengestellt und in ihrer Genauigkeit miteinander verglichen. *M. J. O. Strutt.*

● **Cauer, Wilhelm: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Bd. 1. Leipzig: Akad. Verlagsges. Becker & Erler Komm.-Ges. 1941. XII, 614 S. u. 426 Abb. RM. 43.—.**

An mathematischen Hilfsmitteln gibt Verf. eine Einführung, welche Determinanten und Matrizen, lineare Gleichungssysteme, lineare Transformationen und quadratische Formen umfaßt. Auf Grund dieser Behandlung geht er auf die Berechnung der Eigenschaften gegebener Schaltungen und Vierpole ein, und auf die wichtigsten Sätze, welche hierbei auftreten. Zum tieferen Verständnis behandelt er das Verhalten positiver Funktionen und ihre Partialbruchzerlegung, die Elemente der Theorie der analytischen Funktionen und die konforme Abbildung. Die Anwendung führt zum Verständnis der Reaktanzsätze. Hierauf kommt Verf. zum Hauptteil seines Buches, das die Siebkreise und die Wahl ihrer Schaltungen umfaßt (Tiefpaß-Reaktanzfilter, Reaktanzvierpole, Frequenzweichen). Die Lösung der Aufgabe, Siebe mit vorgegebener Frequenzkennlinie zu bauen, führt Verf. mit Hilfe Tschebyscheffscher Funktionen durch.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Noda, Seiichiro: Theory of the general alternating current network. 1: Solution of the general alternating current network. Mem. Royan Coll. Engng. 13, 289—305 (1940).

Für ein passives Netzwerk mit n Stromzweigen und p Knoten werden die $(n + p - 1)$ linearen unabhängigen Kirchhoffschen Gleichungen zwischen den Zweigströmen, -spannungen und den angelegten elektromotorischen Kräften aufgestellt und nach den Zweigströmen aufgelöst. Zur Vereinfachung dieses Gleichungssystems werden die Stromkreisgleichungen im Netzwerk herangezogen, ohne daß jedoch die Bestimmung der Stromkreise in Abhängigkeit von der Zahl der Knoten und der Systeme unabhängiger Zweige eindeutig definiert wurde. An dessen Statt wird der Nachweis für die Eineindeutigkeit dieser Transformation nur in der Weise versucht, daß die Kreisströme wieder durch die Zweigströme ausgedrückt und die Kirchhoffschen Gesetze für die Knotenpunkte aufgestellt werden. Es wird gezeigt, daß dieses Gleichungssystem mit dem eingangs aufgestellten System identisch ist. *Piesch.*

Ferrari-Toniolo, A.: Sul calcolo delle matrici applicato a quadripoli lineari semplificati e generalizzati. Rend. Mat., Univ. Roma, V. s. 1, 298—319 (1940).

Abgesehen von den bekannten Gleichungspaaren für passive Vierpole, in welchen a) und b) Spannung und Strom am Vierpoleingang bzw. -ausgang; c) und d) die beiden Spannungen bzw. die beiden Ströme als abhängige Veränderliche dargestellt sind, werden auch e) die Gleichungen für Eingangsspannung und Ausgangsstrom sowie f) für Eingangsstrom und Ausgangsspannung in Matrizenform aufgestellt. Bei der Verknüpfung zweier Vierpole können die Gleichungen des resultierenden Vierpols durch einfache Addition der Matrizen gewonnen werden: Bei der Kaskadenschaltung der Vierpole muß die Darstellung a und b, bei der Reih- bzw. Parallelschaltung die Form c bzw. d verwendet werden. Schaltet man die Vierpole eingangsseitig in Reihe, ausgangsseitig parallel, gilt die Darstellung e; beim Vertauschen von Ein- und Ausgang die Darstellung f. Um die Transformierung der Gleichungen in die gewünschte Form zu erleichtern, wurden die Beziehungen zwischen den Elementen der einzelnen Matrizen übersichtlich in einer Tafel zusammengestellt. — Durch Inversion gehen a in b, c in d über und umgekehrt; die Transformation, welche Ein- und Ausgangsklemmen der gleichen Form vertauscht, wird als Orthoversion bezeichnet. Die Umwandlung von a in e wird Metainversion, a in f Parainversion genannt. Die Transformation der entsprechenden Matrizen wird durchgerechnet. *Piesch.*

Haag, J.: Méthode de calcul des oscillations mécaniques ou électriques. Application aux filtres. J. Math. pures appl., IX. s. 19, 107—120 (1940).

Verf. betrachtet die Bewegungsgleichungen eines linearen elektrischen oder mechanischen Systems mit mehreren Freiheitsgraden und definiert an Hand der kinetischen und der potentiellen Energie die Ausdrücke für die Impedanz. Durch Nullsetzen dieser Impedanzen ergeben sich die Eigenschwingungen des Systems. Hierauf betrachtet Verf. die Erregung eines solchen Systems mit Hilfe von Antriebskräften, welche sinusförmig von der Zeit abhängen. Insbesondere werden die Resonanzfälle betrachtet und zusätzliche innere Bindungen des Systems berücksichtigt. Bei den Anwendungen betrachtet Verf. zunächst einen rotierenden Resonator, sodann Kopplungen mehrerer solcher Oszillatoren. Als elektrische Anwendung geht Verf. auf die Theorie der Siebkreise ein. Die elementaren Größen solcher Kreise, wie Dämpfungsmaß, Übertragungsmaß und Wellenwiderstand, werden aus den allgemeinen Gleichungen abgeleitet. Verf. betrachtet die Impedanz als algebraische Funktion der Frequenz und zeigt, unter welchen Bedingungen eine Frequenzsperrung auftritt. Zum Schluß wird gezeigt, wie diese elektrischen Anwendungen mit den zuerst behandelten mechanischen zusammenhängen. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

Taeger, W.: Die Entdämpfung von Schwingungskreisen durch Eisendrosseln. Arch. Elektrotechn. 35, 193—216 (1941).

Verf. zeigt, daß die freien Schwingungen in einem Stromkreis, bestehend aus der

Reihenschaltung einer Selbstinduktion, eines Widerstandes und einer Kapazität, bei Annahme eines einwellig von der Zeit abhängigen Induktionsflusses durch die Hillsche bzw. Mathieusche Differentialgleichung bestimmt werden. Durch Anwendung der Liouvilleschen Transformation führt Verf. diese Differentialgleichung in eine Volterra'sche Integralgleichung über und schreibt die beiden entsprechenden Integralgleichungen für die zwei linear unabhängigen Lösungen an. Er wertet diese Integralgleichungen bis zur zweiten Näherung aus und erhält dadurch bis zu dieser Näherung das allgemeine Integral der genannten Hillschen und Mathieschen Differentialgleichungen. Insbesondere berechnet er für eine Reihe von Sonderfällen in bezug auf die Kreiskonstanten die Frequenzen der freien Schwingungen. Hierauf geht er auf die Bedingungen für die Selbsterregung, d. h. für die labilen Lösungen der Differentialgleichungen ein und zeigt für besondere Annahmen über die magnetische Kennlinie der verwendeten Selbstinduktion, welche Bedingungen dem Widerstand auferlegt werden müssen, damit Anfachung auftritt. Einige numerische Beispiele ergänzen die Diskussion.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Zin, Giovanni: Sulla deformazione dei segnali nei cavi irregolari. Rend. Mat. Univ. Roma, V. s. 2, 33—60 (1941).

In Ergänzung zu einer Untersuchung von Didlaukis und Kaden [Elektr. Nachr.-Techn. 14, 13 (1937)] wird mittels wellenoptischer Methoden die Änderung untersucht, die ein Impuls beim Durchlaufen eines Kabels erfährt, dessen Fabrikationsunregelmäßigkeiten berücksichtigt werden. Ein ungleichmäßiges Kabel wird als Kette von Kabelstücken mit exponentiell verlaufendem Wellenwiderstand aufgefaßt, deren Eigenschaften nach statistischen Gesetzen verteilt sind. U. a. wird die Gruppengeschwindigkeit und die Übertragungszeit eines Impulses abgeschätzt. Mehrfache Reflexionen werden vernachlässigt, so daß die Gültigkeit der Überlegungen sich vornehmlich auf Kabel mit ausreichend großer Dämpfung bezieht. *Cauer (Berlin-Marienfelde).*

Zinke, Otto: Grundlagen der Strom- und Spannungsverteilung auf Antennen. Arch. Elektrotechn. 35, 67—84 (1941).

Verf. führt die elektrische und die magnetische Feldstärke in üblicher Weise auf ein elektromagnetisches Vektorpotential und auf ein skalares Potential zurück und leitet sodann in exakter Form die Telegraphengleichungen einer strahlenden Antenne ab, welche mit den üblichen Gleichungen einer nichtstrahlenden Doppelleitung verglichen werden. Aus dem Verhältnis des Vektorpotentials zum Antennenstrom an jeder Stelle der Antenne ergibt sich der Begriff des Wellenwiderstandes der Antenne, die dynamische Antenneninduktivität und -kapazität je Längeneinheit. Der Wellenwiderstand stellt, wie bei der homogenen Doppelleitung, das Verhältnis von Spannung zum Strom für eine fortschreitende Welle dar. Es ergibt sich, daß die Wellenwiderstände für fortschreitende Wellen in zwei Richtungen nicht gleich sind und daß sie auch bei ortsunabhängigem Antennendurchmesser ortsabhängig sind. Die Lösung der Differentialgleichung für das Vektorpotential zeigt, daß zwei in entgegengesetzten Richtungen fortschreitende Wellen mit exponentieller Dämpfung vorhanden sind. Aus den aufgestellten Gleichungen können grundsätzlich, nach Ermittlung der Strom- und Spannungsverteilung, der Strahlungswiderstand und der Blindwiderstand im Speisungspunkt berechnet werden.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Buchholz, Herbert: Gekoppelte Strahlungsfelder im kreiszylindrischen Hohlleiter. Ann. Physik, V. F. 39, 81—128 (1941).

Verf. betrachtet den Raum im Innern eines Kreiszylinders unendlich großer axialer Ausdehnung, dessen Wand eine unendlich große Leitfähigkeit aufweist. In diesem Kreiszylinder befindet sich ein Dipol, dessen Achse senkrecht zur Zylinderachse liegt. Als ersten Fall betrachtet er einen elektrischen Dipol, dessen Achse tangential zu einem Kreis in einer Ebene senkrecht zur Zylinderachse gerichtet ist. Für diesen Dipol berechnet er mit Hilfe einer Integraldarstellung der beiden Komponenten des Hertz'schen Vektors die elektrischen und magnetischen Feldstärken. Die im Ansatz auftretenden

unbekannten Koeffizienten ergeben sich aus den Grenzbedingungen an der Innenoberfläche des Kreiszylinders. Verf. berechnet mit Hilfe dieser Darstellung das Feld und insbesondere die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zweier von ihm als transversal elektrisch und magnetisch bezeichneter Wellenarten. Hierauf betrachtet er das Strahlungsfeld eines elektrischen Dipols, dessen Achse senkrecht zur Zylinderachse in radialer Richtung weist und der außerhalb der Zylinderachse gelegen ist. Mit Hilfe eines analogen Integralansatzes für die Hertzschen Potentiale berechnet Verf. wieder die verschiedenen Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes und erhält mit Hilfe der Grenzbedingungen wieder die unbekannten Koeffizienten des Ansatzes. Auch hier berechnet er die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten verschiedener Wellenarten. An Stelle der elektrischen Dipole betrachtet Verf. jetzt in gleicher Weise orientierte magnetische Dipole und zeigt, wie diese durch geeignete Zusammenstellungen radialer und tangentialer elektrischer Dipole dargestellt werden können. Er berechnet die Flächenladungen und Flächenströme der betrachteten elektrischen Dipole in der Dipolebene senkrecht zur Zylinderachse. Hierauf gibt er einige Anwendungen der erhaltenen Ergebnisse auf ringförmige Sender, und zwar auf den kreisförmigen Rahmensender mit mehreren stehenden Halbwellen. Ein mathematischer Anhang enthält die Auswertung verschiedener Integrale und Hilfswerte des Textes. *M. J. O. Strutt.*

Rytow, S. M., und F. S. Judkewitsch: Über die Reflexion elektromagnetischer Wellen an einer Schicht mit negativer Dielektrizitätskonstante. J. Physics Acad. Sci. USSR 3, 111—124 (1940).

Verff. diskutieren zunächst einige bisher im Schrifttum verbreitete Überlegungen, welche die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in einem Medium mit stetig veränderlicher Dielektrizitätskonstante betreffen. Der Einfluß der Leitfähigkeit und des Erdmagnetfeldes werden vernachlässigt. Sie gehen von der Wellengleichung für die elektrische Feldstärke aus und wählen den Verlauf der Dielektrizitätskonstanten als Funktion der Fortschreitungsrichtung so, daß sich aus dieser Wellengleichung eine Besselsche Differentialgleichung ergibt. Verff. nehmen eine symmetrische Schicht in bezug auf eine Ebene senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung an. Die Symmetrie- und Grenzbedingungen ergeben die Koeffizienten des Lösungsansatzes. Hieraus berechnet sich der Reflexionskoeffizient der Schicht. Verff. berechnen für verschiedene numerische Beispiele den Verlauf der elektrischen Feldstärke in der Schicht mit veränderlicher Dielektrizitätskonstante und vor dieser Schicht. Aus der kurvenmäßigen Darstellung dieses Verlaufs ergeben sich einige Schlüsse, von denen die Verstärkung des elektrischen Feldes vor der Schicht hervorgehoben wird. Dieses Anschwellen wird von den Verff. als Deutungsmöglichkeit des nichtlinearen Luxemburgeffektes benutzt. Hierzu schätzen sie die Amplitude der Elektronenbewegung im verstärkten elektromagnetischen Felde und zeigen, daß hierdurch nichtlineare Effekte, welche den Beobachtungen entsprechen, möglich sind. In einem Anhang werden die Leistungsverhältnisse in einer Schicht der betrachteten Art behandelt. *M. J. O. Strutt.*

Optik:

Magnus, Wilhelm: Über die Beugung elektromagnetischer Wellen an einer Halbebene. Z. Physik 117, 168—179 (1941).

H. Poincaré hat vorgeschlagen, die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem idealen Leiter mit Hilfe der Berechnung der Stromverteilung auf der leitenden Fläche zu behandeln. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Programm für die Beugung einer ebenen Welle an einer ideal leitenden Halbebene durchgeführt; der elektrische Vektor der ebenen Welle liegt parallel zur Kante des Schirms. Es ergibt sich so auf einem neuen Weg die von Sommerfeld gefundene strenge Lösung. Verf. beweist dazu den Satz: „Wenn die Funktion $g(y)$ sich für alle Werte von $y \geq 0$ in eine Reihe

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n a_n J_n(y)$$

entwickeln läßt, dann besitzt die Integralgleichung

$$g(y) = \int_0^{\infty} f(\eta) H_0^{(2)}(|y - \eta|) d\eta$$

die Lösung

$$f(\eta) = \frac{\pi}{2} e^{-i\pi/4} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \frac{(2m+1)}{\eta} c_m J_{\frac{2m+1}{2}}(\eta);$$

die c_m berechnen sich aus den a_n durch:

$$c_m = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(2m+1)}{(2m+1)^2 - 4n^2};$$

hinreichende, aber nicht notwendige Voraussetzung ist die Konvergenz der Reihe

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. — J und H bedeuten Bessel- und Hankelfunktion. — Für das genannte Beugungsproblem ist $g(y) = \exp(-iy \sin \alpha)$; α ist der vorgegebene Winkel der Wellenrichtung gegen die Schirmebene. Für diesen Fall läßt sich die Reihe für $f(\eta)$ summieren. Verf. bestätigt durch Nachrechnung für $\alpha = 0$, daß seine Lösung mit der von Sommerfeld übereinstimmt.

Bechert (Gießen).

Barreca, P.: Sur la diffraction par un corps noir quelconque de la lumière provenant d'une source punctiforme et équirayonnante. Intégrale complète portée aux quadratures. Arch. Sci. Physiques etc. 22, 234—261 (1940).

Relativitätstheorie:

Dive, Pierre: L'électro-optique dans le temps universel. Bull. Astron., Paris, II. s. 12, 1—71 (1940).

Costa de Beauregard, Olivier: Le tenseur antisymétrique densité de moment pondéromoteur propre. C. R. Acad. Sci., Paris 211, 499—501 (1940).

L'auteur continue ses recherches [C. R. Acad. Sci., Paris 211, 428—431 (1940)] sur la définition des grandeurs mécaniques douées de la variance relativiste et liées à un fluide électronique. A partir de sa définition de la densité de spin σ_i , il introduit le tenseur antisymétrique:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{ic} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \sigma_j}{\partial x^i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3, 4; x^4 = ict)$$

et montre que ce tenseur constitue l'extension relativiste de la densité de moment pondéromoteur propre du milieu. En vertu des principes de la mécanique appliqués aux éléments du fluide, cette densité doit être nulle et le tenseur de spin σ_i irrotationnel.

Lichnerowicz (Paris).

Lichnerowicz, André, et Raymond Marrot: Propriétés statistiques des ensembles de particules en relativité restreinte. C. R. Acad. Sci., Paris 210, 759—761 (1940).

Soient $S(x, y, z)$ un système de référence absolu, dV l'élément de volume de l'espace décrit par le point $P(x, y, z)$, $p(\xi, \eta, \xi)$ le vecteur quantité de mouvement par rapport à S et $d\omega$ l'élément de volume de l'espace des p . Si le nombre des particules ayant leurs centres dans l'élément dV et l'extrémité de leur vecteur quantité de mouvement dans l'élément $d\omega$, est représenté par l'expression $F(P, p, t) dV d\omega$, la fonction F définira la fonction de distribution des particules considérées. — Soit M une particule appartenant à la classe $(dV, d\omega)$ et soit $S'(x', y', z', t')$ le système de référence lié à M . Dans ce système une particule M_1 , de quantité de mouvement absolue p_1 , admet la vitesse W (vitesse relative de M_1 par rapport à M). Menons le plan normal en M à W et soit $d\sigma$ l'élément d'aire de ce plan. Les particules M_1 susceptibles de choquer dans l'aire $d\sigma$ au cours du temps dt , seront celles qui auront leur centres dans l'élément de volume de S' égal à $|W| d\sigma dt'$. Le nombre des particules envisagées sera $F_1 |W| d\sigma dt' d\omega_1$ où $F_1 = F(P, p_1, t)$. Si nous désignons par p' et p'_1 , les quantités de mouvement

de deux particules qui, après le choc, admettront les quantités de mouvement p et p_1 , et si $V(\alpha, \beta, \gamma)$ et $V_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ sont les vecteurs de vitesse des deux particules, la fonction F satisfait à l'équation intégrodifférentielle

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum \alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \sum X \frac{\partial F}{\partial \xi} = \int (F' F'_1 - F F_1) |W| d\sigma d\omega_1,$$

X, Y, Z désignant les composantes du champ extérieur. *B. Hostinský* (Brünn).

Rosenfeld, Léon: Sur le tenseur d'impulsion-énergie. Acad. roy. Belg., Cl. Sci., Mém. 18, Fasc. 6, 1—30 (1940).

Un système d'agents physiques soit décrit par des variables tensorielles et spino-rielles Q_α . La fonction de Lagrange L est supposée de ne contenir que les Q_α et leurs dérivées covariantes premières $Q_{\alpha,j}$. Pour un tel système la densité tensorielle d'énergie-impulsion est calculée à partir de L . L'auteur trouve

$$T_{\cdot i}^{\cdot h} = \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha, h}} Q_{\alpha, i} - L \delta_i^h - R_{i, j}^h.$$

Ici les R_i^h sont certaines fonctions de $\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha, j}}$ et de Q_α . T^{hi} est symétrique et satisfait à l'équation $T_{i, h}^h = 0$. Cette expression générale du tenseur T^{hi} ne dépend pas explicitement de la manière dont la fonction de Lagrange dépend des variables gravitationnelles; elle est immédiatement adaptée au cas de la relativité restreinte.

J. Haantjes (Amsterdam).

Lichnerowicz, André: Sur un théorème d'hydrodynamique relativiste. C. R. Acad. Sci., Paris 211, 117—119 (1940).

L'auteur déduit du théorème d'Eisenhart [Trans. Amer. Math. Soc. 26, 216 (1924)] l'extension relativiste du théorème de Bernoulli. Soit u^i le vecteur vitesse unitaire, ρ et p la densité de matière et la pression d'un fluide parfait. Pour un mouvement permanent, l'indice du fluide (Synge, ce Zbl. 18, 185)

$$F = e^{\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}}$$

est indépendant de la variable temporelle x^4 et la métrique est du type statique le plus général. L'auteur montre que, le long d'une ligne de courant, un tel mouvement satisfait à l'une des deux conditions équivalentes: $F u_4 = \text{const}$; $F^2 g_{44} (1 + u^2) = \text{const}$. où u^2 désigne le carré du vecteur d'espace u^i . Dans le cas où p/ρ et u^2 sont petits, cette condition peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{2} g_{44} + \left(\frac{1}{2} u^2 + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \right) g_{44} = \text{const},$$

forme qui rappelle l'énoncé classique du théorème de Bernoulli. *Autoreferat*.

Järnefelt, G.: Zum Einkörperproblem in dem sich ausdehnenden Raume. Ann. Acad. Sci. Fennicae A 55, Nr 3, 1—21 (1940).

Die Geodätischen in einem nichtstatischen, sphärisch-symmetrischen Gravitationsfeld mit einer Singularität im Ursprung werden eingehend diskutiert. Das von Mc Vittie (vgl. dies. Zbl. 7, 84) nur genähert begründete Resultat, daß Planetenbahnen in der geschilderten Metrik ihre Dimension behalten, wenn die Weltmaterie sich im Großen ausdehnt, wird exakt bewiesen.

Heckmann (Bamburg-Bergedorf).

Atomphysik.

Elektronentheorie:

Glaser, Walter: Strenge Berechnung magnetischer Linsen der Feldform $H = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}$. Z. Physik 117, 285—315 (1941).

Verf. untersucht theoretisch ein Magnetfeld, das den in der Praxis des magne-

tischen Übermikroskops typischen glockenförmigen Verlauf zeigt. Die im Titel genannte Feldform läßt alle wesentlichen Eigenschaften der Abbildung erkennen und gestattet erstmalig, sie streng zu berechnen. Aus der Abbildungsgleichung berechnet Verf. explizit die Vergrößerung, die Anzahl der Zwischenbilder, den chromatischen und den sphärischen Fehler als Funktion der Systemparameter; die Lösungen lassen sich mit Hilfe trigonometrischer Funktionen ausdrücken. Der hinsichtlich dieser Fehler günstigste Dingort und Parameterwert wird bestimmt. Schließlich geht Verf. auf den Einfluß der Unsymmetrie des Feldes (verschiedene Werte der Konstanten a für $z > 0$ und $z < 0$) ein. *W. Henneberg* (Berlin).

Dosse, J.: Strenge Berechnung magnetischer Linsen mit unsymmetrischer Feldform nach $H = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}$. Z. Physik 117, 316—321 (1941).

In Ergänzung der vorstehend referierten Arbeit von Glaser gibt Verf. die Brechkraft und die Konstanten des sphärischen und des chromatischen Fehlers unsymmetrischer Linsenfelder des im Titel genannten Typs zahlenmäßig an. *W. Henneberg*.

Hoek, H.: General theory of the rotatory power of isotropic media. Physica, Haag 8, 209—225 (1941).

Die natürliche Drehung der Polarisationssebene des Lichtes in einer homogenen isotropen Mischung beliebiger Molekeln in statistischer Verteilung wird berechnet, indem die Molekeln als Kontinua von Oszillatoren angesehen werden und ihr Verhalten unter dem Einfluß einer einfallenden Welle und den Sekundärwellen untersucht wird. Insbesondere zeigt sich, daß der nichtspezifische Einfluß eines nichtaktiven Lösungsmittels auf das Drehvermögen durch einen Faktor $(n^2 + 2)/3$ beschrieben wird, wo n der mittlere Brechungsindex der Mischung ist. *F. Hund* (Leipzig).

Nicht-relativistische Quantentheorie:

Wenzl, Aloys: Kausalität oder Freiheit als Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Physik? Naturwiss. 28, 715—722 (1940).

Erörterung der Frage, ob den quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsgesetzen eine verborgene, strenge Determination zugrunde liege oder nicht. Verf. neigt zur letzteren Alternative. Er weist nach, daß in ihr — selbst von seinem „realistischen“ Standpunkt aus — kein logischer Widerspruch zu finden ist. *C. F. v. Weizsäcker*.

Parodi, Maurice, et François Raymond: Remarque sur les vibrations longitudinales des files de particules. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 532—534 (1941).

In einer linearen Kette von Teilchen haben die beiden äußersten die Masse M , die $n - 2$ übrigen die Masse m . Zwischen benachbarten Teilchen werden elastische Kräfte angenommen, für Teilchen gleicher Masse durch die Konstante K , für solche ungleicher Masse durch die Konstante K' bestimmt. Die Bewegungsgleichungen für longitudinale Schwingungen werden durch den harmonischen Ansatz gelöst. Besteht zwischen K, K', m, M ein bestimmter Zusammenhang, so gibt es eine Eigenfrequenz, die von n unabhängig ist. Ein solcher Fall scheint bei den Paraffinen $\text{CH}_3 - (\text{CH}_2)_{n-2} - \text{CH}_3$ vorzuliegen. *J. Meixner* (Berlin).

Rudkjøbing, Mogens: Determination of continuous absorption coefficients in the spectrum of Na I. Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. 18, Nr 2, 1—15 (1940).

Nagamiya, Takeo: Statistical mechanics of one-dimensional substances. 2. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 22, 1034—1047 (1940).

Die Zustandssumme einer eindimensionalen Substanz wird unter den Voraussetzungen berechnet, daß nur benachbarte Moleküle eine Wechselwirkung aufeinander ausüben und daß diese als Wechselwirkung zwischen starren Kugeln beschrieben werden kann, die sich bis zu einem gewissen maximalen Abstand mit einer konstanten Kraft anziehen und bei größeren Abständen keine Kraft aufeinander ausüben. Die Erwartung, daß sich bei diesem Modell bei einem gewissen mittleren Abstand und genügend tiefer Temperatur eine Kondensation ergibt, findet keine Bestätigung. Dieses Ergebnis

wird in Zusammenhang mit der Theorie der Kondensation eines dreidimensionalen Gases von J. E. Mayer und Mitarbeitern [J. chem. phys. 5, 67, 74 (1937); 5, 87, 101 (1938)] diskutiert (vgl. dies. Zbl. 16, 89). *J. Meixner* (Berlin).

● **Mott, N. F., and R. W. Gurney:** *Electronic processes in ionic crystals. (Internat. ser. of monogr. on physics.)* Oxford: Clarendon press a. London: Oxford univ. press 1940. XII, 276 pag. 20/-.

Gombás, Paul: Über die Bindung des metallischen Calciums. (*Inst. f. Theoret. Phys., Univ. Kolozsvár.*) Z. Physik 117, 322—324 (1941).

Gitterkonstante, Gitterenergie und Sublimationswärme des metallischen Calciums werden in besserer Näherung als in einer früheren Arbeit [Z. Physik 104, 592 (1937)] berechnet. Empirische oder halbempirische Parameter werden nicht zu Hilfe genommen. Für das Potential und die Elektronenverteilung des Ca^{++} -Ions werden die von Hartree mit Berücksichtigung des Elektronenaustausches bestimmten Funktionen benutzt. Die Übereinstimmung mit dem Experiment ist besser als in der ersten Näherung. *J. Meixner* (Berlin).

Pomeranchuk, I.: Heat-conductivity of paramagnetic dielectrics at low temperatures. Ž. eksper. teoret. Fiz. 11, 226—245 (1941) [Russisch].

Pomeranchuk, I.: Heat-conductivity of dielectrics at temperatures over the debye temperatures. Ž. eksper. teoret. Fiz. 11, 246—254 (1941) [Russisch].

Kaner, F.: Statistical computation of magnetic susceptibility. J. Physics Acad. Sci. USSR 3, 153—164 (1940).

Wenn es sich darum handelt, für eine Gruppe von N nahe beieinanderliegenden Eigenwerten W_i den Beitrag zur Zustandssumme $Z = \sum e^{-W_i/kT}$ zu berechnen (Z ist also eine symmetrische Funktion der W_i), so ist es nicht nötig, die Säkulargleichung $\det |H_{ik} - W \cdot \delta_{ik}| = 0$ explizit zu lösen (H = Hamiltonoperator); man braucht nur die symmetrischen Funktionen der W_i , die sich rational durch die H_{ik} ausdrücken lassen. Es ist ja auch $Z = \text{Spur } e^{-H/kT}$. Für die Zustandssumme wird eine Entwicklung angesetzt $\ln z = \ln N - \frac{\lambda_1}{kT} + \frac{\lambda_2}{2(kT)^2} - \frac{\lambda_3}{6(kT)^3} \dots$, wo $\lambda_1 = \bar{W}$, $\lambda_2 = \bar{W}^2 - \bar{W}^2$ usw. Diese Größen werden für einen ferromagnetischen Körper und für ein paramagnetisches nichtleitendes Salz bis λ_3 einschließlich berechnet. Daraus folgt dann ein Näherungsausdruck für die freie Energie, die spezifische Wärme, die spontane Magnetisierung usw. Elektronenaustausch wird nur zwischen benachbarten Atomen angenommen, das Austauschintegral wird beim ferromagnetischen Körper positiv angesetzt. Für diesen ergibt sich die Existenz von zwei Curiepunkten, eines paramagnetischen und eines ferromagnetischen (bei dem die spontane Magnetisierung verschwindet). Für paramagnetische Salze ergibt sich in tiefen Temperaturen eine geringere Suszeptibilität als nach der einfacheren Heisenbergschen Theorie, insbesondere geht sie gegen Null für $T \rightarrow 0$. *J. Meixner* (Berlin).

Gorter, C. J., and B. Kahn: On the theory of the gyromagnetic effects. Physica, Haag 7, 753—764 (1940).

Theoretisch untersucht werden die gyromagnetischen Effekte (Einstein-de Haas-Effekt und Barnett-Effekt) für ein Kristallgitter aus Atomen oder Ionen, von denen einige paramagnetisch sind, das aber keinen Ferromagnetismus zeigt. Es stellt sich heraus, daß der Diamagnetismus nichts beiträgt und daß im Beitrag der magnetischen Momente der Atome und Ionen ein Glied steckt, das von der Wechselwirkung der Atome oder Ionen mit ihren Nachbarn (bei nicht gerade zylindrischer Symmetrie des elektrischen Kristallfeldes) abhängt. Ferner zeigt sich, daß die aus den beiden gyromagnetischen Effekten gefolgerten Werte der gyromagnetischen Konstanten genau gleich sein müssen. *F. Hund* (Leipzig).

Fröhlich, H., and F. R. N. Nabarro: Orientation of nuclear spins in metals. (*H. H. Wills Physic. Laborat., Univ., Bristol.*) Proc. roy. Soc., Lond. A 175, 382—391 (1940). Mit der Methode der adiabatischen Abkühlung paramagnetischer Substanzen

können Temperaturen von 10^{-2} bis 10^{-3} Grad abs. erreicht werden. Um weiter herabzukommen, kann man versuchen, den Magnetismus der Atomkerne heranzuziehen. Es wird für Metalle untersucht, welche Temperaturen erreicht werden können, welche Zeiten notwendig sind und welche Eigenschaften die Kernspins bei diesen Temperaturen haben. Die magnetische Wechselwirkung zwischen Leitungselektronen und Kernen führt auf eine indirekte Kopplung zwischen den Kernspins, die für viele Metalle beträchtlich größer ist als die direkte magnetische Wechselwirkung zwischen den Kernspins. Solche Metalle werden kern-ferromagnetisch, d. h. der Zustand mit parallel gestellten Kernspins hat die tiefste Energie. Die Curie-Temperaturen liegen in der Größenordnung $\lesssim 10^{-6}$ Grad abs.; Temperaturen dieser Größenordnung lassen sich daher mit der magnetischen Abkühlungsmethode unter Ausnützung des Kern-Ferro-Magnetismus erreichen. Die Zeit, in der sich ein Kernspin in die Feldrichtung einstellt, ist für Kupfer von der Größenordnung $\lesssim 1$ sec im Feld 10^4 Gauss für $T \rightarrow 0$. Die Curie-Temperatur ist ungefähr durch den Ausdruck $\varepsilon^2/8k\zeta$ gegeben; ε = Hyperfeinstrukturaufspaltung des freien Atoms, ζ = von den Leitungselektronen eingenommener Energiebereich, k = Boltzmann-Konstante. Metalle sind für die magnetische Abkühlungsmethode vermutlich wesentlich geeigneter als Isolatoren. *J. Meixner.*

Pauling, Linus, and Max Delbrück: The nature of the intermolecular forces operative in biological processes. Science, New York 92, 77—79 (1940).

Gegen die von Jordan versuchte Theorie der Reproduktion von Genen, Bildung von Antikörpern usw. auf Grund der Annahme einer quantenmechanischen Resonanzanziehung zwischen gleichen Molekülen wird eingewendet: Unter den für die Jordansche Hypothese notwendigen Voraussetzungen ist die Resonanzanziehung zwischen ungleichen Molekülen nahezu ebenso groß wie die zwischen gleichen Molekülen; für große Moleküle in Lösung wird das Energiespektrum praktisch kontinuierlich, so daß der Unterschied zwischen gleichen und ungleichen Molekülen wegfällt. Die Verf. glauben, daß die genannten Erscheinungen dadurch zustande kommen, daß Moleküle sich verbinden, die wie Matriz und gegossenes Stück genau aufeinander passen, wo also entgegengesetzt geladene Gruppen einander entsprechender räumlicher Anordnung möglichst nahe aneinanderkommen usw. *Bechert (Gießen).*

Relativistische Quantentheorie:

Hönl, H.: Ist die Diracsche Theorie des Positrons lorentzinvariant? (*Physik. Inst., Univ. Erlangen.*) *Physik. Z.* 42, 19—23 (1941).

In der Diracschen Theorie des Positrons werden die (feldfreien) Zustände negativer Energie als mit dem Paulischen Ausschließungsprinzip gehorchenden Elektronen aufgefüllt gedacht. Der Verf. untersucht, inwieweit diese Beschreibungsform in den Rechnungen über Paarerzeugung und Selbstenergie lorentzinvariant ist. Ein vom Verf. vorgeschlagenes abgeändertes Verteilungsgesetz der Zustände negativer Energie soll auf eine endliche Selbstenergie ($= mc^2/137$) führen und für den Energieverlust schneller Elektronen zu einer neuen (von der Bethe-Heitlerschen abweichenden [*Proc. Roy. Soc. London A* 146, 83 (1934)] Formel führen. *v. Stueckelberg (Genf).*

Casta de Beauregard, Olivier: Le quadrvecteur densité de moment cinétique propre. C. R. Acad. Sci., Paris 211, 428—430 (1940).

Dans la théorie de l'électron de Dirac, s'introduit le quadrvecteur densité de spin σ_i du fluide électronique. En raisonnant dans le système galiléen attaché au centre de gravité d'un élément fluide, l'auteur étudie comment le vecteur σ_i est lié au tenseur antisymétrique moment cinétique propre généralisé; il déduit de la définition classique d'une densité vectorielle, l'orthogonalité du vecteur σ_i et du vecteur-courant. *Lichnerowicz (Paris).*

Broer, L. J. F.: On the quantisation of electron wave functions. *Physica*, Haag 8, 321—336 (1941).

Die Dirac-Gleichungen $d^A \dot{\varphi}_A = i\kappa \dot{\chi}^B$, $d_A \dot{\chi}^B = i\kappa \varphi_A$ werden aus einem Varia-

tionsprinzip $\delta \int L dV dt = 0$ abgeleitet, das quadratisch in den Ableitungen der unabhängigen Variablen ist. Dazu werden die ladungskonjugierten Größen $\bar{\varphi}, \bar{\chi}$ eingeführt: $\bar{\varphi}_A = \chi_A^*, \bar{\chi}^{\dot{B}} = \varphi^{*\dot{B}}$. Man faßt nun $\varphi, \bar{\varphi}$ als unabhängige Variable auf und $\chi, \bar{\chi}$ als deren Ableitungen. Die Gleichungen folgen aus dem Variationsprinzip mit

$$L = mc^2 (\bar{\varphi}_A \varphi^A + \bar{\chi}_{\dot{B}} \chi^{\dot{B}}).$$

In gewöhnlicher Schreibweise ist $L = imc^2 \psi^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta \psi$. Die Theorie läßt sich kanonisch formulieren und quantisieren. Man erhält die bekannten Resultate. Als Energietensor folgt der Tetrodetensor. Zum Schluß weist Verf. darauf hin, daß die gewöhnliche Behandlung der Wechselwirkung mit dem quantisierten Strahlungsfeld nicht den Tetrodeschen Energieausdruck zugrunde legt. *M. Fierz* (Basel).

Géhéniau, J.: Théorie variationnelle des spineurs. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 26, 44—52 (1940).

Géhéniau, J.: Théorie variationnelle des spineurs. (2. comm.) Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 26, 133—143 (1940).

Kahn, B.: Remark on deviations from the fine structure formula. Physica, Haag 8, 58 (1941).

Fröhlich, Heitler und Kahn (vgl. dies. Zbl. 21, 188) fanden, daß zwischen einem Proton und einem Elektron in Abständen von der Größenordnung des klassischen Elektronenradius r_0 eine sehr starke Abstoßungskraft bestehen sollte. Das würde eine Verschiebung der s -Terme des Wasserstoff-Spektrums von gerade noch beobachtbarer Größe bedeuten. Bei der Berechnung dieses Ergebnisses wurde jedoch das wirkliche Potential durch einen unendlich hohen und unendlich steilen Potentialwall bei $r \approx r_0$ ersetzt. Dieses Verfahren ist nicht statthaft, da ein solches Potential nicht stabil gegen Paarbildung ist. Für ein Abstoßungspotential von physikalisch vernünftigen Verlauf ergeben sich sowohl nach der Schrödinger- wie nach der Diracgleichung Termverschiebungen, die außerhalb jeder Beobachtungsmöglichkeit liegen. (Darauf hat der Ref. schon in den Ann. Physik [vgl. dies. Zbl. 20, 86] hingewiesen.)

J. Meixner (Berlin).

Sakuma, Kiyosi: Cosmology in terms of wave geometry. 7. Some characteristics of the universe. J. Sci. Hiroshima Univ. A 11, 15—20 (1941).

Cosmology in terms of wave geometry is characterized by the equations

$$V_i \psi = \sum_i \psi; \quad u^i = \bar{\psi} \omega \gamma^i \psi; \quad u^i V_j u^j = Q u^i.$$

The author shows that u^i cannot be taken as the momentum-density in the ordinary sense as has been done in the papers I—VI (this Zbl. 21, 86; 22, 426; 23, 429) but that u^i may be identified with the particle momentum-density vector. In this model of the universe the conservation of material energy is equivalent with that of the number of particles.

J. Haantjes (Amsterdam).

Sibata, Takasi: Cosmology in terms of wave geometry. 8. Observation systems in cosmology. J. Sci. Hiroshima Univ. A 11, 21—45 (1941).

The author starts with the following fundamental equation for ψ : $V_i \psi = k \gamma_i \psi$, where $u^i = \bar{\psi} \omega \gamma^i \psi$ represents the momentum-density of nebulae. In a former paper (this Zbl. 21, 86) it has been shown that this equation is completely integrable if the space is of constant curvature, which gives the line element of de Sitter. It has been shown that each observer resting in a nebula has the same ds^2 . The coordinate system for two such observers are connected by a motion. The group of motions can be classified into two groups G_4 and G_6 . These transformations are given in their finite form. It is proved that the origin of a coordinate system K has a motion in a radial direction with respect to another system K' . Furthermore it is proved that the fundamental equation is invariant under the group G_6 .

J. Haantjes (Amsterdam).

Iwatsuki, Toranosuke, and Takasi Sibata: Cosmology in terms of wave geometry. 9. Theory of spiral nebulae. J. Sci. Hiroshima Univ. A 11, 47—88 (1941).

The author finds two different equations for ψ , which are invariant under the

subgroup G_4 (comp. the preceding rev.). G_4 is the subgroup of motions for which the origin of the coordinate system is invariant. These fundamental equations give two particle momentum-density vectors u and u' . Then by superposing these two flux-systems a vector u is obtained which is regarded as representing a general local flux of stellar matter with a centre. By the condition that u' describes a stationary plane with an axis of axial symmetry, it is shown that each curve generated by u' is a logarithmic spiral with the centre at the origin. *J. Haantjes (Amsterdam).*

Tonnelat, Marie Antoinette: Sur la théorie du photon dans un espace de Riemann. Ann. Phys., Paris 15, 144—224 (1941).

Dans ce travail l'équation du photon dans un espace de Riemann se met sous la forme $\gamma^\mu \psi_{;\mu} - k\psi = 0$. Ici le ψ , grandeur spinorielle, est une matrice à 4 lignes et à 4 colonnes. La dérivation covariante de ψ est définie par la condition $\gamma_{\mu;\nu} = 0$. Il est montré que les équations du photon sont compatibles. Ensuite l'auteur déduit une généralisation des équations électromagnétiques de la théorie du photon. La propagation des champs telle qu'elle se généralise de la propagation euclidienne définit la masse du photon à partir du rayon de courbure de l'univers: $\mu_0 = h(\pi Rc)^{-1}$.

J. Haantjes (Amsterdam).

Tonnelat, Marie-Antoinette: Sur la fusion de deux particules de spin. 1. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 187—189 (1941).

Man betrachtet eine Wellenfunktion ψ_{iklm} ($i, k, l, m = 1$ bis 4). Diese soll sich wie das Produkt $\psi_{il}\varphi_{mk}$ transformieren, wobei ψ_{il} , φ_{mk} sich wie das Produkt zweier Diracscher Funktionen transformieren. Es sollen folgende Gleichungen gelten

$$[(\mathcal{M}^\mu - \mathcal{N}^\mu + M^\mu - N^\mu)\partial_\mu - 4k]\psi_{iklm} = 0,$$

$$(\mathcal{M}^\mu - \mathcal{N}^\mu - M^\mu + N^\mu)\partial_\mu \psi_{iklm} = 0,$$

$$(\mathcal{M}^\mu)_{iklm pqrs} = \gamma_{ip}^\mu \delta_{lr} \delta_{ms} \delta_{kq},$$

$$(M^\mu)_{iklm pqrs} = \gamma_{ms}^{\mu l} \delta_{kq} \delta_{ip} \delta_{lr},$$

$$(\mathcal{N}^\mu)_{iklm pqrs} = (\gamma_{rl}^\mu)^+ \delta_{ip} \delta_{ms} \delta_{kq},$$

$$(N^\mu)_{iklm pqrs} = (\gamma_{qk}^\mu)^+ \delta_{ms} \delta_{ip} \delta_{lr}.$$

Die Gleichungen werden nun in bei Lorentztransformationen irreduzible Bestandteile zerlegt. Es zeigt sich, daß sie folgende Teilchenarten beschreiben: 1 Teilchen vom Spin 2, 3 Teilchen vom Spin 1, 2 Teilchen vom Spin 0. Alle Felder genügen der Gleichung $\square\varphi = k^2\varphi$.

M. Fierz (Basel).

Landau, L.: On the scattering of mesotrons by „nuclear forces“. J. Physics Acad. Sci. USSR 2, 483—484 (1940).

Auf Grund der Analogie zwischen dem Problem der Streuung eines Mesons durch ein Kernteilchen und eines Neutrons durch einen Kern erwartet Verf. auch für ersteren Prozeß eine Breit-Wigner-Formel. Das für hohe Energien des Mesons divergierende Resultat der Störungsrechnung entspricht der Breit-Wigner-Formel ohne Dämpfungsglied im Nenner. Durch dessen Berücksichtigung werden die Ergebnisse konvergent.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Zavelevich, G.: Internal conversion on a L-layer at low excitations of nuclei. Ž. eksper. teoret. Fiz. 11, 213—221 (1941) [Russisch].

Migdal, A.: Ionization of atoms at α - and β -disintegration. Ž. eksper. teoret. Fiz. 11, 207—212 (1941) [Russisch].

Landau, L.: The angular distribution of the shower particles. J. Physics Acad. Sci. USSR 3, 237—242 (1940).

Durch genauere Auswertung der Ansätze der Theorie der Kaskadenschauer von Landau und Rumer [Proc. Roy. Soc. London A 166, 213 (1938)] werden berechnet:

1. die Zahl geladener Teilchen in einem Schauer im Maximum der Entfaltung, 2. der mittlere Ablenkungswinkel der Schauerteilchen, 3. die räumliche Breite eines Schauers.
C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Astrophysik.

Wasiutynski, J.: The evolution of convective stars. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 100, 362—369 (1940).

Nach der Theorie der Energieerzeugung der Sterne nimmt die Leuchtkraft mit abnehmendem Wasserstoffgehalt sehr stark zu. Der resultierende Weg eines Hauptreihensternes im Hertzsprung-Russelldiagramm war von Gamow untersucht worden unter der Annahme nur homologer Änderungen des inneren Aufbaus. Verf. untersucht zwei spezielle Modelle unter Berücksichtigung der Abweichungen von der Homologie. Das erste Modell besitzt einen konvektiven Kern und eine energiequellenfreie Hülle mit Strahlungstransport (etwa *A*- und *B*-Sterne). Das zweite Modell ist durchweg konvektiv aufgebaut, wie es bei Sternen späterer Spektraltypen der Fall sein mag. Das Ergebnis ist ähnlich wie bei Gamow, daß der Radius sich nur wenig im Laufe der Entwicklung ändert, die Leuchtkraft dagegen sehr stark. Beiläufig wird mitgeteilt, daß differentielle Änderungen des Molekulargewichtes kein für die Riesensterne geeignetes Sternmodell liefern, die Nachrechnung hat Oepik's Resultate in dieser Hinsicht anscheinend widerlegt.

L. Biermann (Babelsberg).

Mattioli, G. D.: Sopra gli effetti secolari delle maree e dell'irraggiamento di massa sugli elementi del moto dei sistemi binari e il problema dell'evoluzione secolare delle stelle doppie. Comment. Pontif. Acad. Sci. 4, 225—286 (1940).

Verf. berechnet den Einfluß der Flutreibung auf die Bahnelemente, indem er zunächst die störenden Kräfte entwickelt und diese dann über einen ganzen Umlauf integriert, um die säkularen Anteile der Wirkungen dieser Kräfte zu bestimmen. So ermittelt er die Störungswirkungen für jedes einzelne Bahnelement. Seine Entwicklungen sind für jede Exzentrizität und Neigung gültig, während ähnliche, die früher von Darwin [Philos. Trans. Roy. Soc. London 171, 713 (1880)] aufgestellt wurden, nur für kleine Exzentrizität und Neigung gelten. Nur Kugelförmigkeit der Komponenten wurde vorausgesetzt. — Weiter betrachtet Verf. den Endzustand gleicher Rotations- und Revolutionsbewegung mit der Exzentrizität 0. Er zeigt, daß es stabile und instabile Zustände dieser Art gibt (als Ende der Entwicklung kommen natürlich nur die stabilen in Frage). Es ist aber auch möglich, daß kein solcher Endzustand erreicht wird, sondern daß beide Weltkörper schließlich ineinander stürzen. Verf. gibt die genauen Bedingungen für das Eintreten der beiden Möglichkeiten. — Weiter betrachtet Verf. noch den Einfluß der Massenabnahme infolge Ausstrahlung. Um numerische Resultate zu erhalten, muß man zunächst den Koeffizienten der inneren Reibung kennen. Verf. schätzt diesen ab, was allerdings nur recht unsicher gelingt, und betrachtet die Entwicklung von Doppelsternen. Es zeigt sich, daß bei *B*-Sternen mit einer Periode von 5 Tagen oder kürzer die Exzentrizität infolge der Flutreibung in 10^9 Jahren praktisch 0 wird, bei einer Periode von 10 Tagen aber endlich bleibt, da schließlich durch den Einfluß der Massenabnahme die Flutreibung zu gering wird, um die Exzentrizität wesentlich zu verändern.

G. Schrutka (Hamburg).

Brill, A.: Neue Methoden in der Stellarstatistik. 3. Die Bestimmung der räumlichen Sternverteilung bei interstellarer Absorption. Astron. Nachr. 271, 97—115 (1941).

Die in früheren Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 17, 432 und 21, 381) vom Verf. entwickelte Methode zur Bestimmung der räumlichen Sternverteilung aus Abzählungen nach scheinbarer Helligkeit wird ergänzend dargestellt und auf Abzählungen nach scheinbarer Eigenbewegung übertragen, durch deren Hinzunahme theoretisch auch die Bestimmung der interstellaren Absorption möglich wird.

Wempe (Jena).